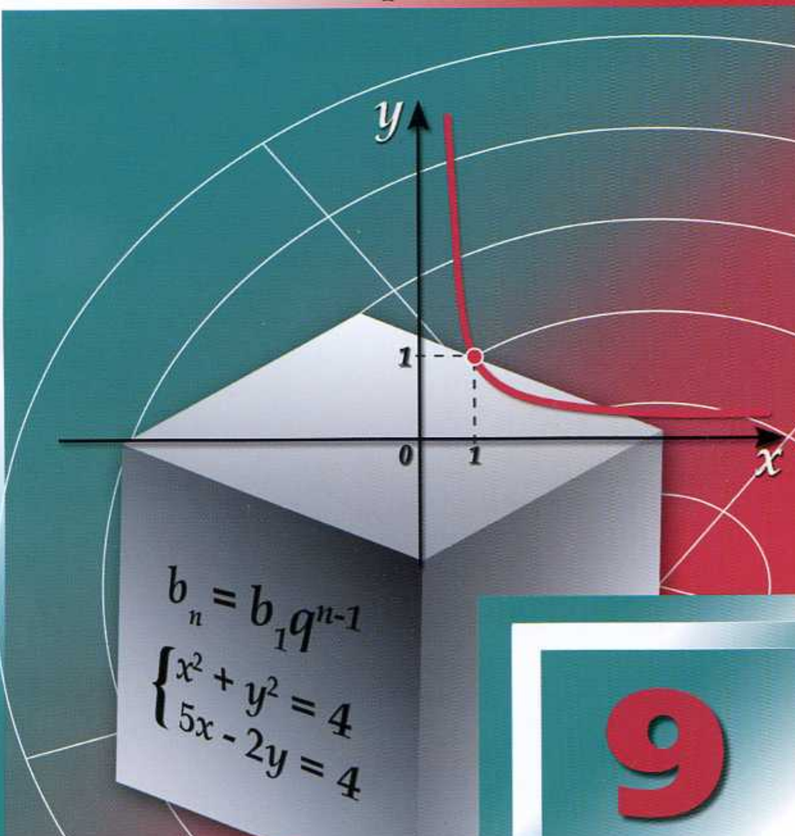
2-е издание, новый комплект уроков

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ по АЛГЕБРЕ

К УМК А.Г. Мордковича



9 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН
И. А. МАСЛЕННИКОВА
Т. Г. МИШИНА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к УМК
А.Г. Мордковича и др.
(М.: Мнемозина)

НОВОЕ ИЗДАНИЕ

9 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2011

УДК 372:851
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н., Масленникова И.А., Мишина Т.Г.

Р87 Поурочные разработки по алгебре: 9 класс. – М.: ВАКО, 2011. – 288 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00455-3

Пособие предлагает полный комплект поурочных разработок по алгебре для 9 класса, ориентированных на педагогов, работающих по учебному комплекту А.Г. Мордковича (М.: Мнемозина). Издание содержит все, что необходимо для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, самостоятельные, контрольные и зачетные работы с подробным разбором. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 9 класса по предмету, но и подготовить учащихся к сдаче ГИА.

Может быть использовано как начинающими педагогами, так и преподавателями со стажем.

УДК 372:851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00455-3

Предисловие

Напомним особенности обучения в 9 классе. К окончанию этого класса учащиеся, занимающиеся по различным программам, должны получить равноценный объем качественных знаний и сдавать экзамены в одинаковых условиях (в форме государственной итоговой аттестации). Поэтому 9 класс – этап систематизации и уточнения знаний, подведения определенных итогов.

В этом классе рассматриваются и уточняются понятия, связанные с функцией и графиком функции; уравнениями и системами уравнений, неравенствами; арифметической и геометрической прогрессиями; основами комбинаторики и теории вероятностей. В первую очередь необходимо уделять внимание развитию навыков решения задач по указанным темам.

Поэтому данное пособие преследует три основные цели: помочь в изучении материала по алгебре для 9 класса, подготовке по этим разделам к успешной ГИА (а в дальнейшем и ЕГЭ) и использованию полученных знаний при обучении в вузе. Пособие составлено для УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Нумерация задач в поурочном планировании дана для задачника этого УМК.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: подробнее рассмотрены основные свойства функций и построение графиков функций, даны дополнительные типы уравнений и неравенств, детальнее изучены прогрессии. Такое расширение материала вполне доступно для девятиклассников, дает более цельное представление о рассматриваемых темах и подготавливает к ГИА. Особое внимание уделено задачам, содержащим модули или параметры. Практика показывает, что именно они вызывают наибольшие трудности у учащихся (и не только 9 класса). Предусмотрены различные формы контроля успеваемости.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку, повысить ее качество и при этом сэкономить время учителя.

Рекомендации к проведению уроков

Данное пособие позволяет проводить занятия с использованием базового УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и рассчитано на 102 урока в год. Содержание уроков является избыточным (в расчете на сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно. Учитывая сложность курса, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании сдвоенные уроки математики.

Поурочное планирование включает четыре вида занятий:

1. Урок изучения нового материала.
2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.
3. Письменный опрос, самостоятельная работа, контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок изучения нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока делает учитель (~1–2 мин). Требуется донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены).

II. Изучение нового материала (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая сложность курса, этот подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но ме-

нее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 мин). Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется, кроме определения, попросить ученика привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. Задание на уроке дается из числа наиболее характерных, типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1) самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.;

2) в виде диалога учащихся на одной парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения;

3) работа у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль школьников у доски, так и подключение к проверке всего класса. При этом происходит и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается из числа типовых задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 60–80 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому восприятию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить учеников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. п. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в старших классах и вузе, подготовке к сдаче зачетов и экзаменов. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии.

VI. Во многих уроках предусмотрены творческие задания. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или непривычностью условия, или большей сложностью, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных задач очень полезно.

В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (факультативы, кружки, дополнительные занятия и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) во время проведения математических турниров, олимпиад, боев, недель математики и т. д.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учеников. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Урок отработки и закрепления пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрены повторение материала и отработка навыков решения задач (~20 мин). Прежде всего, он включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давали сами учащиеся. Вопросы могут включать в себя непонятые определения, термины, правила и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более понятными и доступными для понимания ровесниками, чем пояснения учителя.

Ориентировочное время на эту стадию этапа II ~5–10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (тест, письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~10–15 мин.

В материалах уроков тесты используются в небольшом количестве для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование не дает возможности выявить причину ошибки (непонимание темы, пробелы в предыдущих темах, невнимательность, арифметические ошибки и т. д.).

Задание для письменного опроса содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок.

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, характерные задачи. При проведении работы обращайте внимание на рациональный подход к решению задач.

По каждой изучаемой теме приводится **контрольная работа**. Она составлена **в шести вариантах** различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Каждый вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, они подобны задачам, решенным в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оцениваться контрольная работа может следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность задач).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). Изучаемый в 9 классе материал достаточно сложен. Для решения предлагаемых задач требуется время на размышление. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводят ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у школьников, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, на последних занятиях проводится письменный **тематический зачет**. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа А – самые простые задачи, группа В – более сложные задачи, группа С – самые сложные задачи). Каждая задача из группы А оценивается в 1 балл, из группы В – в 2 балла, из группы С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Заметим, что в зависимости от сложности и трудоемкости изучаемой темы количество задач в контрольной и зачетной работе может варьироваться.

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. Пусть каждый школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего.

Очень смущает последняя тема 9 класса «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». Она представляет собой достаточно изолированный раздел математики со своеобразными понятиями, логикой, методикой решения задач. На наш взгляд, изучение такой темы в средней школе, а особенно в 9 классе, нецелесообразно. Практика показывает, что изучение ее даже в 11 классе физико-математических лицеев вызывает значительные трудности.

Тематическое планирование учебного материала

(3 ч в неделю, всего 102 ч в год)

Глава 1. Неравенства и системы неравенств (16 ч)

§ 1. Линейные и квадратные неравенства (3 ч)

§ 2. Рациональные неравенства (5 ч)

§ 3. Множества и операции над ними (3 ч)

§ 4. Системы рациональных неравенств (4 ч)

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Глава 2. Системы уравнений (15 ч)

§ 5. Основные понятия (4 ч)

§ 6. Методы решения систем уравнений (5 ч)

§ 7. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций (5 ч)

Контрольная работа № 2 (1 ч)

Глава 3. Числовые функции (25 ч)

§ 8. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции (4 ч)

§ 9. Способы задания функций (2 ч)

§ 10. Свойства функции (4 ч)

§ 11. Четные и нечетные функции (3 ч)

Контрольная работа № 3 (1 ч)

§ 12. Функции $y = x^n (n \in N)$, их свойства и графики (4 ч)

§ 13. Функции $y = x^{-n} (n \in N)$, их свойства и графики (3 ч)

§ 14. Функция $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и график (3 ч)

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Глава 4. Прогрессии (16 ч)

§ 15. Числовые последовательности (1 ч)

§ 16. Арифметическая прогрессия (5 ч)

§ 17. Геометрическая прогрессия (6 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Глава 5. Элементы комбинаторики и теории вероятностей (12 ч)

§ 18. Комбинаторные задачи (3 ч)

§ 19. Статистика – дизайн информации (3 ч)

§ 20. Простейшие вероятностные задачи (3 ч)

§ 21. Экспериментальные данные и вероятности событий (2 ч)

Контрольная работа № 6 (2 ч)

Итоговое повторение (17 ч)

Итоговая контрольная работа (1 ч)

Глава 1
Рациональные неравенства и их системы

В этой главе будет рассмотрено решение основных видов алгебраических неравенств: линейных, квадратных и рациональных, а также их систем. Подобные неравенства возникают при исследовании функций, в текстовых задачах, в задачах на прогрессии и др.

Урок 1. Основные понятия и свойства неравенств

Цель: рассмотреть основные понятия, связанные с неравенствами.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Частично этот материал изучался в конце 8 класса. Теперь необходимо его упорядочить и систематизировать.

Рассмотрим неравенство $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ – функция, зависящая от переменной x, $\vee$ – знак сравнения (может совпадать с одним из четырех знаков: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$). Решением этого неравенства (или частным решением) называют такое значение переменной x, которое обращает неравенство $f(x) \vee 0$ в верное числовое неравенство. Множество всех частных решений неравенства называют общим решением (или решением) неравенства.

Пример 1

Числа 3; 1,6; $\sqrt{5}$; π – частные решения неравенства $2x - 3 \geq 0$ (в этом легко убедиться подстановкой таких решений в данное неравенство). Числа x, удовлетворяющие условию $x \geq 1{,}5$, являются общим решением приведенного неравенства.

Применяются различные формы записи неравенств. В частности, используя перенос в другую часть неравенства его членов (с изменением их знаков на противоположные), мы имеем право записать общий вид неравенства в форме $f(x) \vee g(x)$ (хотя, на наш взгляд, переход от одной формы записи неравенства к другой в учебнике неоправдан).

Два неравенства $f(x) \vee g(x)$ и $r(x) \vee s(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые решения или решений не имеют. Можно дать и другое определение: два неравенства равносильны, если любое частное решение первого неравенства является частным решением второго и, наоборот, любое частное решение второго неравенства является частным решением первого.

Пример 2

а) Неравенства $(2x^2+1)(2x-3) \geq 0$ и $2x \geq 3$ равносильны, так как имеют одинаковые решения: $x \geq 1{,}5$.

б) Неравенства $2x^2 + 1 < 0$ и $3|x| + 2 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений.

в) Неравенства $2x - 3 \geq 0$ и $(2x - 3)(4x - 20) \leq 0$ неравносильны, так как решение первого неравенства $x \geq 1{,}5$, второго неравенства – $1{,}5 \leq x \leq 5$. Таким образом, решения второго неравенства составляют только часть решений первого неравенства.

При решении неравенства его заменяют более простым равносильным неравенством. Такую замену называют **равносильным преобразованием неравенства**. Для этих преобразований используются три правила.

Правило 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 3

Неравенство $3x + 4 < x^2$ равносильно неравенству $0 < x^2 - 3x - 4$, так как члены $3x$ и 4 перенесены в правую часть с противоположным знаком, а знак неравенства оставили неизменным.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 4

Неравенство $16x + 8 \geq 20x^2$ равносильно неравенству $4x + 2 \geq 5x^2$: обе части неравенства разделили на положительное число 4, а знак неравенства сохранили.

Правило 3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Пример 5

Неравенство $-3x^2 + 5x + 1 \geq 0$ равносильно неравенству $3x^2 - 5x - 1 \leq 0$, так как обе части первого неравенства умножили на отрицательное число (-1) и изменили знак неравенства на противоположный.

Правила 2 и 3 можно и нужно обобщить.

Правило 2*. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x, и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 6

Неравенство $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$ равносильно неравенству $2x - 3 \geq 0$, так как обе части первого неравенства умножили на выражение $p(x)=\sqrt{x^2+1}$, положительное при всех значениях x, и сохранили знак неравенства.

Правило 3*. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное при всех значениях x, и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 7

Неравенство $(-x^4 - 1)(2x - 3) \geq 0$ равносильно неравенству $2x - 3 \leq 0$, так как обе части первого неравенства разделили на выражение $p(x)=-x^4-1=-(x^4+1)$, отрицательное при всех значениях x, и изменили знак неравенства на противоположный.

Заметим, что *формулировки* правил 2* и 3* очень *важны*: только при соблюдении их условий получаются равносильные неравенства.

Пример 8

Неравенство $\dfrac{2x-3}{x^2-1} \geq 0$, разумеется, неравносильно неравенству $2x - 3 \geq 0$, так как выражение $p(x) = x^2 - 1$ в зависимости от x может иметь и положительный, и отрицательный знак. Поэтому просто умножить обе части данного неравенства на выражение $p(x) = x^2 - 1$ нельзя. Исходное неравенство равносильно двум системам неравенств $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ x^2-1>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3<0, \\ x^2-1<0. \end{cases}$ Проще всего решить данное неравенство, разумеется, методом интервалов (который будет изложен позже).

III. Контрольные вопросы

1. Частное и общее решения неравенства.

2. Понятие равносильных неравенств.

3. Равносильные преобразования неравенств.

4. Три правила равносильных преобразований неравенств (фронтальный опрос).

IV. Задания на уроке и дома

1. Является ли данное число a решением неравенства?

а) $3x - 2 \geq 4$; $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 5$;

б) $3 - 4x > -11$; $a = -3$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 4$, $a = 6$;

в) $|2x - 1| \geq 3$; $a = -2$, $a = -1$, $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$;

г) $|2 - 3x| < 4$; $a = -\sqrt{3}$, $a = 1$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 4$;

д) $3x^2 \geq 4 - 4x$; $a = -3$, $a = -\sqrt{2}$, $a = -1$, $a = 1$, $a = \dfrac{\pi}{2}$;

е) $2x^2 + 5x - 3 < 0$; $a = -4$, $a = -\sqrt{5}$, $a = -1$, $a = 2$, $a = \pi$.

2. Являются ли данные неравенства равносильными и объясните почему:

а) $3x^2 \geq 2x + 1$ и $3x^2 - 4x \geq 1 - 2x$;

б) $2x^2 - 3x \geq 1$ и $2x^2 + 3x > 6x + 1$;

в) $(|x| + 1)(3 - 2x) \geq 0$ и $3 - 2x \geq 0$;

г) $(-2x^2 - 3)(5 + 2x) \leq 0$ и $5 + 2x \geq 0$;

д) $\dfrac{4x - 5}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0$ и $4x - 5 > 0$;

е) $-\sqrt{x^4 + 1}(3x + 2) \leq 0$ и $3x + 2 \geq 0$;

ж) $\dfrac{2x^2 - 3}{2x + 5} < 0$ и $2x^2 - 3 < 0$;

з) $\dfrac{x^2}{x + 3} - 2 \geq 0$ и $\dfrac{x^2 - 2x - 6}{x + 3} \geq 0$.

V. Подведение итогов урока

Уроки 2–3. Линейные и квадратные неравенства

Цель: напомнить решение линейных и квадратных неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Второе правило равносильных преобразований неравенств.
2. Является ли данное число a решением неравенства?
   $2x^2 + x - 3 \le 0$; $a = -3$, $a = -1$, $a = 1$, $a = 2$.
3. Являются ли данные неравенства равносильными и почему:
   а) $2|x| + 3 \le 0$ и $3x^2 + 2 < 0$;
   б) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}} \ge \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$ и $3x^2 - 2x - 1 \ge 0$.

Вариант 2

1. Третье правило равносильных преобразований неравенств.
2. Является ли данное число a решением неравенства?
   $3x^2 - 5x - 2 \ge 0$; $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$.
3. Являются ли данные неравенства равносильными и почему:
   а) $3x^2 + 7 > 0$ и $4|x| + 5 \ge 0$;
   б) $x^2(x^2+1) \le (x+2)(x^2+1)$ и $x^2 - x - 2 \le 0$.

III. Изучение нового материала

Неравенство $f(x) \vee 0$ называют по типу функции $f(x)$. **Линейным неравенством** называют неравенство вида $ax + b \vee 0$, так как функция $f(x) = ax + b$ линейная. **Квадратным неравенством** называют неравенство вида $ax^2 + bx + c \vee 0$, так как функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ квадратная (или квадратичная). Напомним решение линейных и квадратных неравенств, которое основано на результатах предыдущего урока. Сначала рассмотрим наиболее типичные линейные неравенства.

Пример 1

Решим неравенство $\dfrac{2x-7}{6} + \dfrac{7x-2}{3} \le 3 - \dfrac{1-x}{2}$.

Чтобы избавиться от знаменателей дробей, умножим обе части неравенства на наименьшее общее кратное знаменателей дробей НОК (6, 3, 2) = 6. Так как число 6 положительное, то сохраним знак неравенства и по правилу 2 получим равносильное неравенство:

$6\left(\dfrac{2x-7}{6} + \dfrac{7x-2}{3}\right) \le 6\left(3 - \dfrac{1-x}{2}\right)$, или $2x - 7 + 2(7x-2) \le 18 - 3(1-x)$, или $2x-7+14x-4\le 18-3+3x$. В каждой части неравенства приведем подобные члены: $16x - 11 \le 15 + 3x$. Перенесем члены, содержащие x, в левую часть неравенства, числа – в правую часть. При этом изменим знаки таких членов на противоположные и сохраним знак неравенства. По правилу 1 получаем равносильное неравенство $16x - 3x \le 15 + 11$. В каждой части неравенства вновь приведем подобные члены: $13x \le 26$. Чтобы найти решение неравенства, разделим обе его части на положительное число 13 и по правилу 2 получим $x \le 2$ или $x \in (-\infty; 2]$.

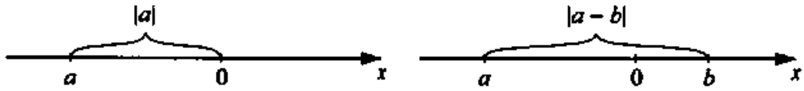
Часто встречаются **двойные линейные неравенства.**

Пример 2

Решим неравенство $2 < 3 - \frac{2}{3}x \le 4$.

Из всех частей неравенства вычтем число 3 и сохраним знаки неравенства. По правилу 1 (его можно трактовать и иначе: если из обеих частей неравенства вычесть один и тот же член и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному) имеем равносильное неравенство: $2-3<3-\frac{2}{3}x-3\le 4-3$ или $-1<-\frac{2}{3}x\le 1$. Умножим все части неравенства на отрицательное число $\left(-\frac{3}{2}\right)$ и изменим знаки неравенства на противоположные. По свойству 3 получим равносильное неравенство: $-1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)>\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ge 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$, или $1{,}5 > x \ge -1{,}5$, или $x\in[-1{,}5;\ 1{,}5)$.

Также распространены неравенства, содержащие знаки модуля. Сначала напомним **определение модуля.** Модулем числа (выражения) a называют число (выражение) a, если a неотрицательно, и число (выражение) с противоположным знаком ($-a$), если a отрицательно, т. е. $|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\ge 0, \\ -a, & \text{если } a<0. \end{cases}$ Геометрический смысл $|a|$ – расстояние от точки a до точки 0 на координатной оси, т. е. $|a| = \rho(a; 0)$ (см. рис.). Геометрический смысл $|a - b|$ – расстояние между точками a и b на координатной оси, т. е. $|a; b| = \rho(a; b)$.

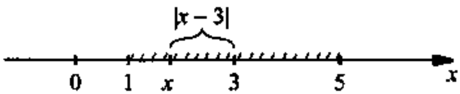


Для решения простейших неравенств достаточно геометрического смысла модуля.

Пример 3

Решим неравенство $|x-3| \le 2$.

Геометрический смысл данного неравенства: надо на координатной прямой найти такие точки x, для которых расстояние до точки 3 не больше 2. Посчитаем границы этого диапазона: $3-2=1$ и $3+2=5$. Тогда решение данного неравенства – интервал $[1; 5]$.



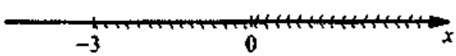
В более сложных случаях необходимо использовать определение модуля.

Пример 4

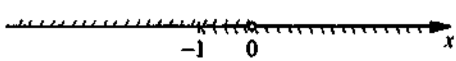
Решим неравенство $|x| \le 2x+3$.

Используя определение модуля, надо рассмотреть два случая.

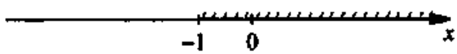
а) Если $x \ge 0$, то данное неравенство имеет вид $x \le 2x+3$. Его решение $x \ge -3$ или интервал $x \in [-3; +\infty)$. Однако условию $x \ge 0$ удовлетворяет только часть этого решения – промежуток $x \in [0; +\infty)$, что и является решением данного неравенства в этом случае.



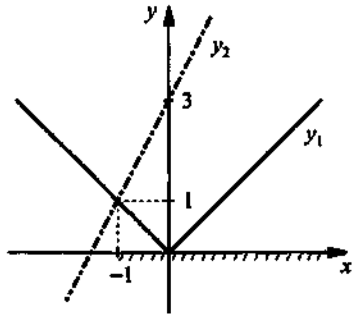
б) Если $x < 0$, то исходное неравенство имеет вид $-x \le 2x+3$ или $-3 \le 3x$, откуда $x \ge -1$. С учетом условия $x < 0$ получаем решение данного неравенства в этом случае – интервал $x \in [-1; 0)$.



Учитывая результаты случаев *а* и *б*, найдем окончательное решение данного неравенства – промежуток $x \in [-1; +\infty)$.



Данное неравенство допускает простое и наглядное **графическое решение**. Построим графики функций $y_1 = |x|$ и $y_2 = 2x+3$.



Смысл неравенства $y_1 \le y_2$: надо найти такие значения x, при которых график функции y_1 расположен не выше графика функции y_2. Эти графики пересекаются в точке $(-1; 1)$. Видно, что неравенство выполняется при $x \in [-1; +\infty)$.

Другой разновидностью линейных неравенств являются **неравенства с параметрами.**

Пример 5

При всех значениях параметра p решим неравенство $(p-3)x \ge p^2 - 9$.

Другими словами, для каждого значения параметра p надо указать, при каких значениях x неравенство выполняется. Очевидно, что данное неравенство является линейным по переменной x. Чтобы найти x, надо обе части исходного неравенства разделить на коэффициент при x, т. е. на $p - 3$. Но эта величина может иметь разный знак. Поэтому по правилам 2 и 3 получим разный результат. Значит, надо рассмотреть три случая.

а) Если $p - 3 < 0$ (т. е. $p < 3$), то по правилу 3 получаем: $x \le \dfrac{p^2 - 9}{p-3}$, или $x \le p + 3$, или $x \in (-\infty; p+3]$. Заметим, что при этом знак неравенства изменился на противоположный.

б) Если $p - 3 = 0$ (т. е. $p = 3$), то, разумеется, делить обе части данного неравенства на выражение $p - 3$ нельзя. Поэтому подставим значение $p = 3$ в исходное неравенство. Получим неравенство $0 \cdot x \ge 0$, которое выполняется при всех значениях x. Поэтому решение неравенства в этом случае: $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $p - 3 > 0$ (т. е. $p > 3$), то по правилу 2 получаем: $x \ge \dfrac{p^2 - 9}{p-3}$, или $x \ge p + 3$, или $x \in [p+3; +\infty)$. Отметим, что при этом знак неравенства сохранился.

Обратим внимание **на форму записи ответа**. Ответ принято записывать в порядке возрастания параметра, и решение неравенств приводить в виде числовых промежутков. Итак, ответ: при $p \in (-\infty; 3)$ $x \in (-\infty; p+3]$, при $p = 3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $p \in (3; +\infty)$ $x \in [p+3; +\infty)$.

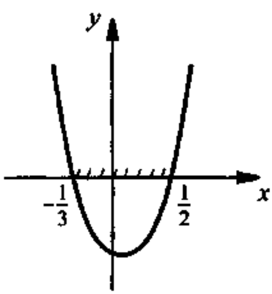
Теперь рассмотрим решение квадратных неравенств. Подобные неравенства удобно решать графически.

Решение сводится к нахождению промежутков x, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет положительные или отрицательные значения. Для этого надо определить, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: направление ветвей параболы (вверх или вниз) и точки пересечения ее с осью x (если они имеются). Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 6

Решим неравенство $6x^2 - x - 1 \le 0$.

Рассмотрим функцию $y = 6x^2 - x - 1$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $6x^2 - x - 1 = 0$. Его корни $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

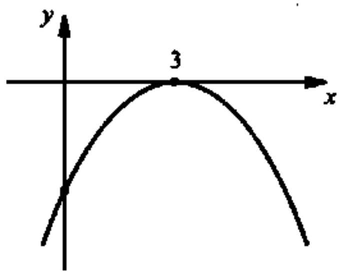


Нарисуем график. Видно, что функция принимает неположительные значения на промежутке $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$. Поэтому этот промежуток и является решением данного неравенства.

Пример 7

Решим неравенство $-\dfrac{1}{3}x^2 + 2x - 3 \ge 0$.

Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 3$. Поэтому парабола касается оси абсцисс в точке $x = 3$.



Нарисуем график. Видно, что функция принимает неотрицательные значения (а именно $y = 0$) только в единственной точке $x = 3$. Поэтому данное неравенство имеет решение $x = 3$.

Из рассмотренных примеров уже можно сформулировать **алгоритм решения** неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$.

1) Определяют направление ветвей параболы: при $a > 0$ – вверх, при $a < 0$ – вниз.

2) Находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и определяют, имеет ли трехчлен корни.

3) Если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси абсцисс. С учетом направления ветвей строим эскиз параболы, проходящий через построенные на оси x точки.

4) Если трехчлен не имеет корней, строим эскиз параболы, расположенный в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в нижней полуплоскости при $a < 0$.

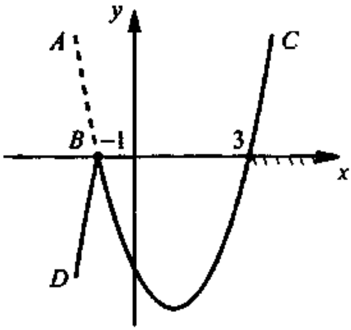
5) Находят на оси x промежутки, для которых выполнено данное неравенство.

Разумеется, графический способ может быть использован и для решения более сложных неравенств.

Пример 8

Решим неравенство $|x+1|(x-3) \geq 0$.

Рассмотрим функцию $y=|x+1|(x-3)$ и построим ее график. Для этого раскроем знак модуля, рассмотрев два случая. При $x \geq -1$ получаем функцию $y = (x + 1)(x - 3)$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх и проходящая через точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Из этой параболы сохраним участок BC, для которого $x \geq -1$.



При $x < -1$ получаем функцию $y = -(x + 1)(x - 3)$, которая отличается от предыдущей только знаком. Поэтому участок AB (для $x < -1$) предыдущей параболы отражаем зеркально вниз и получаем часть BD требуемого графика. Таким образом, построен график данной функции.

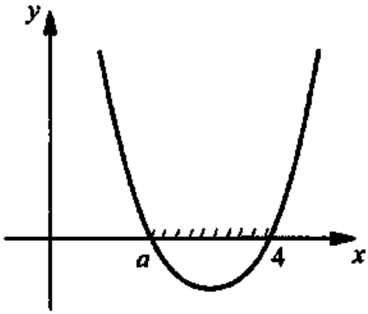
Видно, что данное неравенство ($y \geq 0$) выполняется для отдельной точки $x = -1$ и в промежутке $[3; +\infty)$. Поэтому решение неравенства $x \in \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Пример 9

Решим неравенство $x^2-(a+4)x+4a \leq 0$.

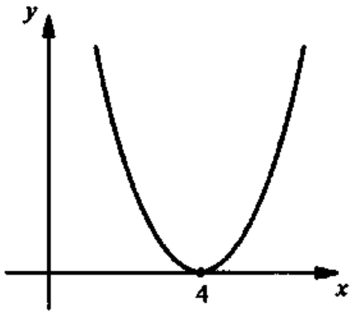
Найдем дискриминант квадратного трехчлена $D=(a+4)^2-4\cdot 4a=a^2+8a+16-16a=(a-4)^2$ и его корни $x=\dfrac{a+4\pm(a-4)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 4$. Поэтому графиком квадратичной функции $y=x^2-(a+4)x+4a$ является парабола, направленная ветвями вверх и имеющая с осью абсцисс две или одну общие точки. Поэтому необходимо рассмотреть три случая.

а) Пусть $x_1 < x_2$, т. е. $a < 4$. Соответствующий график приведен на рисунке.



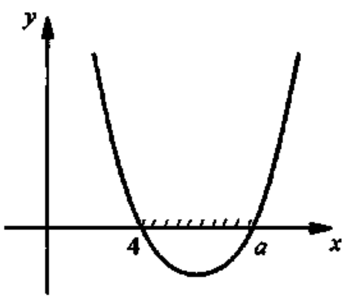
Видно, что значения функции $y \leq 0$ на промежутке $[a; 4]$. Этот промежуток является решением неравенства в данном случае.

б) Пусть $x_1 = x_2$, т. е. $a = 4$. В этом случае парабола касается оси абсцисс в точке $x = 4$. Соответствующий график приведен на рисунке.



Видно, что значения функции или положительны или значение равно нулю. Последнее имеет место только в точке $x = 4$. Эта точка и является решением неравенства в этом случае.

в) Пусть $x_1 > x_2$, т. е. $a > 4$. График приведен на рисунке.



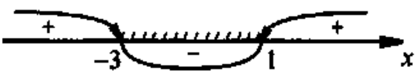
Видно, что значения функции $y(x)$ неположительны на промежутке $[4;\ a]$. Этот промежуток является решением неравенства для данного случая.

Учитывая три рассмотренные ситуации, запишем окончательный ответ задачи: при $a \in (-\infty;\ 4)$ $x \in [a;\ 4]$, при $a = 4$ $x = 4$, при $a \in (4;\ +\infty)$ $x \in [4;\ a]$.

Рассмотрим наиболее удобный и **универсальный способ** решения любых неравенств – **метод интервалов**. Он с успехом может быть использован при решении всех типов неравенств, изучаемых в школе. Пока мы рассмотрим применение этого способа для целых и рациональных неравенств. Суть метода интервалов будет понятна из следующего примера.

Пример 10

Решим неравенство $x^2 + 2x - 3 \le 0$.



На числовой оси отметим корни уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$: $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка: $x \in (-\infty;\ -3)$; $x \in [-3;\ 1]$ и $x \in (1;\ +\infty)$.

При $x \in (-\infty;\ -3)$ в многочлене $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ оба сомножителя отрицательны. Поэтому многочлен $x^2 + 2x - 3 > 0$ (отмечено знаком «+») и неравенство не выполнено.

Для $x \in [-3;\ 1]$ множитель $(x + 3)$ становится неотрицательным, множитель $(x - 1)$ по-прежнему отрицательный. Поэтому произведение $(x+3)(x-1) \le 0$ (отмечено знаком «–») и неравенство выполнено. Следовательно, интервал $x \in [-3;\ 1]$ удовлетворяет неравенству.

При $x \in (1;\ +\infty)$ сомножители $(x + 3)$ и $(x - 1)$ положительны, произведение $(x+3)(x-1) > 0$ (отмечено знаком «+») и неравенство не выполнено.

Заметим, что столь детальный анализ знаков при решении квадратных неравенств является излишним. Достаточно определить знак выражения $x^2 + 2x - 3$ в одной точке, не совпадающей с границами интервалов (например, при $x = -10$ выражение $x^2 + 2x - 3 = (-10)^2 + 2(-10) - 3 = 77 > 0$). Кроме того, надо учесть, что при переходе к каждому следующему промежутку знак выражения x^2+2x-3 меняется на противоположный. Поэтому диаграмма знаков, приведенная на рисунке, может быть получена сразу (решение неравенства отмечено штриховкой).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое неравенство называется линейным?
2. Определение квадратного неравенства.
3. Модуль числа (выражения) и его геометрический смысл.

V. Задание на уроках

§ 1, № 2 (а); 3 (в, г); 4 (а); 7 (а, г); 10 (в, г); 14 (а, б); 17 (б); 19 (а, б); 21 (а); 22 (в, г); 24.

VI. Задание на дом

§ 1, № 2 (б); 3 (а, б); 4 (в); 7 (б, в); 10 (а, б); 14 (в, г); 17 (г); 19 (в, г); 21 (б); 22 (а, б); 25.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 4–6. Рациональные неравенства

Цель: рассмотреть метод интервалов для решения неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите неравенство $6x^2-13x+6\le 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$; в) $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

2. Решите неравенство $-25x^2+20x-4\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty;\ 0,4]$; б) $[0,4;\ +\infty)$; в) $\varnothing$; г) 0,4.

3. Решите неравенство $x^2-3|x|+2\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$; б) $[1;\ 2]$; в) $[2;\ +\infty)$; г) $[-1;\ 1]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $15x^2-34x+15\ge 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right]$; б) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$; г) $\left[\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right]$.

2. Решите неравенство $9x^2-12x+4\le 0$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; в) $\varnothing$; г) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

3. Решите неравенство $x^2-5|x|+6\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty;-3]$; б) $[-2;2]$; в) $[3;+\infty)$;
г) $(-\infty;-3]\cup[-2;2]\cup[3;+\infty)$.

III. Изучение нового материала

Рациональным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $h(x)\vee g(x)$, где $h(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения (функции). Напомним, что рациональное выражение – алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Пример 1

а) Выражения $3x^2+5, \frac{7y^4-5}{2y+3}, \frac{8z^5+3z^4-2}{z}$ рациональные (по определению).

б) Выражения $\sqrt{x+3}, \frac{\sqrt{y}}{y+2}, \frac{\sqrt{3z^2+1}}{\sqrt{z}-2}$ нерациональные, так как содержат операцию извлечения квадратного корня.

Решение рациональных неравенств происходит по стандартной схеме.

1) С помощью правил равносильных преобразований неравенство $h(x)\vee g(x)$ записывают в виде $f(x)\vee 0$, где $f(x)$ – алгебраическая дробь (в частности, $f(x)$ может быть и многочленом).

2) Находим корни числителя и знаменателя дроби $f(x)$ (или раскладываем на множители числитель и знаменатель дроби $f(x)$).

3) Используют метод интервалов.

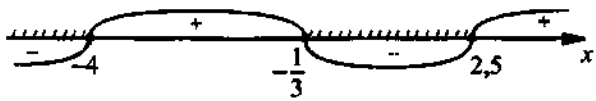
На предыдущем уроке метод интервалов был использован для решения квадратных неравенств. Теперь необходимо рассмотреть применение этого метода для решения более сложных неравенств, в первую очередь рациональных неравенств. Чтобы понять особенности использования метода интервалов, приведем ряд примеров. Сначала рассмотрим решение неравенств высоких степеней.

Пример 2

Решим неравенство $(2x-5)(x+4)(3x+1)\le 0$.

Данное неравенство уже записано в виде $f(x)\vee 0$, и выражение $f(x)$ уже разложено на множители (т. е. пункты 1 и 2 уже выполнены условием задачи). Осталось применить метод интервалов.

Найдем корни выражения $f(x)=(2x-5)(x+4)(3x+1)$. Ими являются числа $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = -4$, $x_3 = -\frac{1}{3}$. Очевидно, что знак выражения $f(x)$ может измениться только в этих точках. Отметим числа x_1, x_2 и x_3 на координатной прямой. Они разбили числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых выражение $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Определим знак выражения $f(x)$ в любой точке (кроме трех отмеченных).



Например, при $x = 5$ каждый из трех множителей выражения $f(x)$ положительный. Поэтому и все выражения $f(x) > 0$. Строим диаграмму знаков выражения $f(x)$ и выписываем решение данного неравенства: $x\in(-\infty;\,-4]\cup\left[-\frac{1}{3};\,2{,}5\right]$.

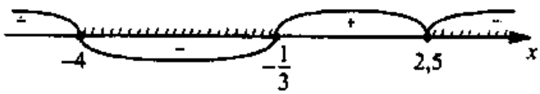
Слегка изменим условие задачи.

Пример 3

Решим неравенство $(2x-5)^2(x+4)(3x+1)\le 0$.

Отличие от предыдущего примера состоит в первом множителе: $(2x-5)^2$ вместо $(2x-5)$. Однако это приводит к совершенно другому ответу.

В данном примере в точке $x = 2{,}5$ знак выражения $f(x)$ не меняется. Действительно, при всех значениях x (кроме $x = 2{,}5$) выражение $(2x-5)^2 > 0$. Поэтому знак $f(x)$ меняется только в точках $x_1 = -4$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$. В соответствии с этим диаграмма знаков выражения $f(x)$ имеет другой вид.



Учитывая, что данное неравенство нестрогое, то его решением являются числовой промежуток и отдельная точка: $x \in \left[-4; -\frac{1}{3}\right] \cup \{2,5\}$. Если сравнить этот ответ с ответом предыдущей задачи, то видны существенные и принципиальные различия.

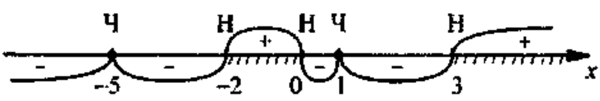
Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 4

Решим неравенство $(x+5)^8(x+2)^3x(x-1)^2(x-3)^7 \geq 0$.

Прежде всего отметим, что если в разложение многочлена на множители входит сомножитель $(x-x_0)^k$, то говорят, что x_0 – корень многочлена кратности k. Для решения неравенства важно знать, является ли k четным или нечетным числом, так как при k четном многочлен справа и слева от x_0 имеет один и тот же знак (т. е. знак многочлена не меняется), а при k нечетном многочлен справа и слева от x_0 имеет противоположные знаки (т. е. знак многочлена изменяется).

Вернувшись к данному неравенству, отметим, что многочлен имеет корни $x_1 = -5$ (кратности 8 – четная кратность), $x_2 = -2$ (кратности 3 – нечетная), $x_3 = 0$ (кратности 1 – нечетная), $x_4 = 1$ (кратности 2 – четная), $x_5 = 3$ (кратности 7 – нечетная). Нанесем эти корни на числовую ось и буквами Н и Ч отметим четность кратности этих корней.



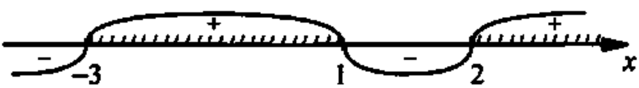
Определим знак многочлена, стоящего в левой части неравенства при любом x, не совпадающем с корнями (например, при $x = -3$ многочлен отрицательный). Рассмотрим теперь знаки многочлена, двигаясь в положительном направлении оси $0x$. Так как $x = -2$ – корень нечетной кратности, то при этом значении x происходит изменение знака многочлена на противоположный и многочлен на промежутке (–2; 0) положительный. При $x = 0$ (корень нечетной кратности) опять происходит изменение знака многочлена и он на промежутке (0; 1) становится отрицательным. Так как $x = 1$ – корень четной кратности, то многочлен знак не меняет и на промежутке (1; 3) он по-прежнему отрицательный. Рассуждая подобным образом, нетрудно получить полную диаграмму знаков многочлена на всей числовой оси, приведенную на рисунке. После этого легко ответить на вопрос задачи: при каких x знак многочлена неотрицательный? Из рисунка видно, что такими x являются $x \in \{-5\} \cup [-2; 0] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.

Разумеется, в тех случаях, когда неравенство не имеет вида, приведенного в примере 4, то неравенство необходимо, используя те или иные приемы, привести к указанному виду.

Пример 5

Решим неравенство $x^3 + 6 > 7x$.

Запишем неравенство в виде $x^3 - 7x + 6 > 0$ и разложим многочлен в левой части на множители. Для этого член $-7x$ представим как сумму двух слагаемых: $-6x$ и $-x$ и сгруппируем члены многочлена: $(x^3 - x) + (6 - 6x) > 0$, или $x(x^2 - 1) - 6(x - 1) > 0$, или $x(x-1)(x+1) - 6(x-1) > 0$, или $(x-1)(x^2+x-6) > 0$. Разложение x^2+x-6 на множители проводим стандартным путем, зная его корни ($x = -3$, $x = 2$), и окончательно получаем: $(x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0$. Все корни этого многочлена первой кратности, и дальнейшее решение не вызывает трудностей. Построив диаграмму знаков многочлена, найдем $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.



Остановимся теперь на решении рациональных неравенств методом интервалов.

Рациональные неравенства легко сводятся к решению неравенств высоких степеней. Действительно, после преобразований левая часть рационального неравенства может быть представлена в виде отношения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$. Умножим обе части такого неравенства на многочлен $[Q(x)]^2$, который положителен при всех допустимых значениях x (так как $Q(x) \neq 0$). Тогда знак неравенства не меняется и получаем неравенство $P(x) \cdot Q(x) \vee 0$, равносильное данному. То есть исходное неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \vee 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$ которая далее решается методом интервалов.

Пример 6

Решим неравенство $\dfrac{(x^2+1)(x^2-2x-3)}{(5x-x^2)(x+2)} \geq 0.$

Отметим прежде всего, что $(5x-x^2)(x+2) \neq 0$ или $x(5-x)(x+2) \neq 0$, т. е. $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 5$ (ОДЗ неравенства). Сведем данное **рациональное неравенство к алгебраическому** (аналогичному примеру 1). Для этого умножим обе части неравенства на положительное выражение – квадрат знаменателя $(5x-x^2)^2(x+2)^2$. При этом знак неравенства не меняется и получаем: $(x^2+1)(x^2-2x-3)(5x-x^2)(x+2) \geq 0$. Разложив квадратные трехчлены на множители, имеем: $(x^2+1)(x-3)(x+1)x(5-x)(x+2) \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов, учитывая, что все корни многочлена имеют первую кратность: $x \in (-\infty;\ -2] \cup [-1;\ 0] \cup [3;\ 5]$.

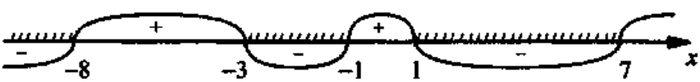
Теперь учтем ОДЗ исходного неравенства и окончательно найдем: $x \in (-\infty;\ -2) \cup [-1;\ 0) \cup [3;\ 5)$.

Пример 7

Решим неравенство $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \dfrac{1}{x+3}$.

Чтобы свести пример к аналогичному предыдущему примеру, перенесем все члены неравенства в его левую часть: $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} - \dfrac{1}{x+3} \leq 0$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим: $\dfrac{x^2+7x-8}{(x-7)(x+1)(x+3)} \leq 0$, т. е. неравенство предыдущего типа.

Решая его аналогично, найдем: $x \in (-\infty;\ -8] \cup (-3;\ -1) \cup [1;\ 7)$.

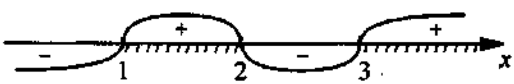


Для диаграммы знаков учтены корни числителя $x^2 + 7x - 8$ ($x = 8$ и $x = 1$), первая кратность всех корней и ограничения на x ($x \neq -3$, $x \neq -1$, $x \neq 7$).

Пример 8

Решим неравенство $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}\ge 2x.$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x-1\ne 0$, $x-3\ne 0$ (т. е. $x\ne 1$, $x\ne 3$). Почленно разделим дроби в левой части неравенства на знаменатели, сгруппировав слагаемые в числителях дробей: $\dfrac{(x^2-x)+1}{x-1}+\dfrac{(x^2-3x)+1}{x-3}\ge 2x,$ или $\dfrac{x(x-1)}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x(x-3)}{x-3}+$ $+\dfrac{1}{x-3}\ge 2x,$ или $x+\dfrac{1}{x-1}+x+\dfrac{1}{x-3}\ge 2x,$ или $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\ge 0.$ Приводим дроби к общему знаменателю и получаем: $\dfrac{2x-4}{(x-1)(x-3)}\ge 0.$ Далее решаем это неравенство по обычной схеме и находим: $x\in(1;2]\cup(3;+\infty).$



При наличии в рациональных неравенствах знаков модуля их надо раскрыть.

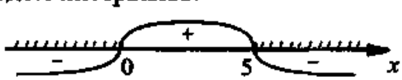
Пример 9

Решим неравенство $|5-x|(x-1)+5<x.$

Решим неравенство аналитически и графически.

а) Перенесем все члены неравенства в левую часть: $|5-x|(x-1)+$ $+5-x<0$ – и раскроем знак модуля.

Если $5-x\ge 0$ (т. е. $x\le 5$), то получаем неравенство $(5-x)(x-1)+$ $+(5-x)<0$, или $(5-x)(x-1+1)<0$, или $(5-x)x<0$. Решим это неравенство методом интервалов.



Наносим корни соответствующего уравнения: $x_1=0$ и $x_2=5$. Определяем знак выражения $(5-x)x$, например, для $x=2$: $(5-2)\cdot 2=$ $=6>0$. После этого рисуем диаграмму знаков. Решением неравенства являются $x\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$. Так как рассматривается область $x\le 5$, то решением является промежуток $x\in(-\infty;0)$.

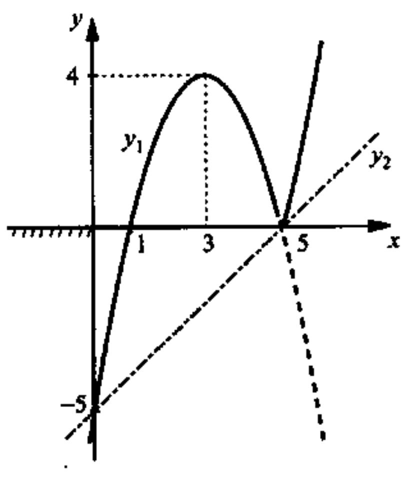
Если $5-x<0$ (т. е. $x>5$), то имеем неравенство $-(5-x)(x-1)+$ $+(5-x)<0$, или $(5-x)(-x+1+1)<0$, или $(5-x)(2-x)<0$. На числовой оси отмечаем корни соответствующего уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Находим знак выражения $(5 - x)(2 - x)$, например, при $x = 3$: $(5 - 3)(2 - 3) = -2 < 0$ – и рисуем диаграмму знаков.

Решением неравенства будет интервал $x \in (2; 5)$. Так как рассматривается область $x > 5$, то этот промежуток решением данного неравенства не является.

Итак, решение неравенства $x \in (-\infty; 0)$.

б) Запишем данное неравенство в виде $|5 - x|(x - 1) < x - 5$. Построим график функции $y_1 = |5 - x|(x - 1)$. Для этого раскроем знак модуля. При $x \le 5$ получаем: $y_1 = (5 - x)(x - 1)$. В этой области построим график такой функции. Для $x > 5$ имеем: $y_1 = -(5 - x)(x - 1)$. Видно, что эта функция отличается от предыдущей только знаком «минус». Поэтому этот график легко получить из предыдущего, если отразить пунктирную часть параболы относительно оси абсцисс зеркально вверх.

Построим также график функции $y_2 = x - 5$. Теперь необходимо определить, при каких значениях x значение функции y_2 больше значений функции y_1 (т. е. график y_2 находится выше y_1). Из рисунка видно, что это происходит при $x \in (-\infty; 0)$.



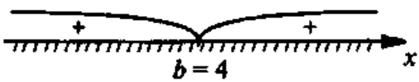
Пример 10

Решим неравенство $x^2 - (b + 4)x + 4b \ge 0$.

Найдем дискриминант соответствующего уравнения: $D=(b+4)^2-4\cdot 4b=b^2+8b+16-16b=b^2-8b+16=(b-4)^2$. Теперь легко определить и корни: $x_{1,2}=\dfrac{b+4\pm(b-4)}{2}$ или $x_1=b$ и $x_2=4$. Параметр b может быть меньше числа 4, совпасть с ним или оказаться больше числа 4. Рассмотрим эти случаи.

а) Если $b<4$, то диаграмма знаков изображена на рисунке. Неравенству удовлетворяют промежутки, расположенные за корнями, т. е. $x\in(-\infty;\, b]\cup[4;\, +\infty)$.

б) Если $b=4$, то неравенство имеет вид: $x^2-8x+16\geq 0$ или $(x-4)^2\geq 0$. Это неравенство выполнено при всех $x\in(-\infty;\, +\infty)$.

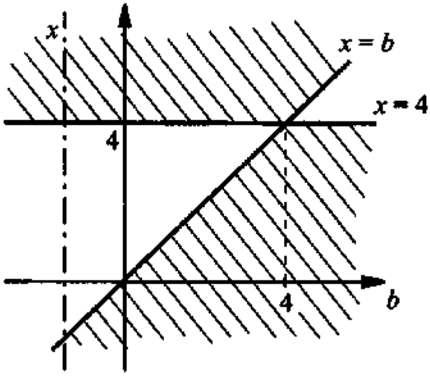


в) Если $b>4$, то неравенству удовлетворяют интервалы, расположенные за корнями, т. е. $x\in(-\infty;\, 4]\cup[b;\, +\infty)$.

Итак, получаем ответ: для $b\in(-\infty;4)$ $x\in(-\infty;\, b]\cup[4;\, +\infty)$; для $b=4$ $x\in(-\infty;\, +\infty)$; для $b\in(4;\, +\infty)$ $x\in(-\infty;\, 4]\cup[b;\, +\infty)$.

Заметим, что эти три случая можно объединить, если использовать метод интервалов на координатной плоскости (а не на координатной прямой, как ранее). Особенно такой подход удобен при решении сложных задач.

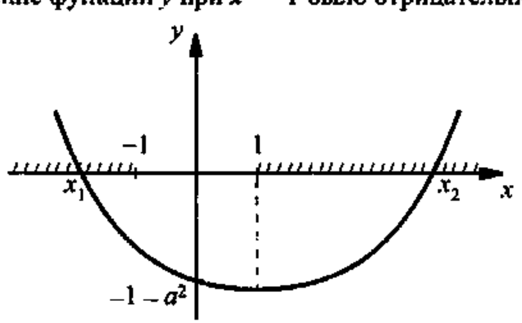
На координатной плоскости bOx построим корни $x_1=b$ и $x_2=4$ квадратного трехчлена. Очевидно, что данное неравенство $x^2-(b+4)x+4b\geq 0$ выполняется на промежутках x, расположенных за корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена. Множество таких точек $(b;\, x)$ заштриховано. Если зафиксировать значение b и провести вертикальную прямую $x=b$, то видно, что штрихпунктирная линия попадает в заштрихованную область на промежутках $x\in(-\infty;\, b]\cup[4;\, +\infty)$. Эти промежутки являются решением неравенства при $b<4$. Аналогично получаем решения неравенства при $b=4$ и $b>4$.



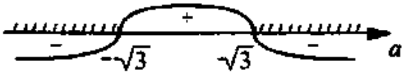
Пример 11

Найдем все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2-2x-a^2=0$ меньше (-1), а другой больше 1.

Найдем дискриминант этого уравнения: $D=2^2-4\cdot(-a^2)=$ $=4+4a^2$. При всех значениях a величина $D>0$, поэтому уравнение имеет два различных корня. Схематично изобразим график функции $y=x^2-2x-a^2$. Вершина этой параболы находится в точке $(1;-1-a^2)$. Тогда больший корень x_2 всегда больше 1. Для того чтобы меньший корень x_1 был меньше (-1), необходимо и достаточно, чтобы значение функции y при $x=-1$ было отрицательно.



Запишем это условие: $(-1)^2-2\cdot(-1)-a^2<0$ или $3-a^2<0$. Решим это неравенство методом интервалов. Находим корни соответствующего уравнения: $a_1=-\sqrt{3}$ и $a_2=\sqrt{3}$. При $a=0$ определяем знак этого выражения: $3-0^2-3>0$ – и рисуем диаграмму знаков. Теперь можно записать ответ: при $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$ условия задачи выполнены.



IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение рационального неравенства.

2. Общая схема решения рациональных неравенств.

3. На примере объясните решение неравенства методом интервалов.

4. Кратность корня многочлена и ее влияние на применение метода интервалов к решению неравенства (поясните на примерах).

V. Задание на уроках

§ 2, № 1 (в); 4 (б); 7 (а, б); 9 (в, г); 15 (а); 18 (в); 22 (а, б); 24 (в, г); 26 (а); 30 (в); 32 (а, б); 33 (в, г); 35; 37 (а, б).

VI. Задание на дом

§ 2, № 1 (г); 4 (г); 7 (в, г); 9 (а, б); 15 (б); 18 (г); 22 (в, г); 24 (а, б); 36 (б); 30 (г); 32 (в, г); 33 (а, б); 36; 37 (в, г).

VII. Творческие задания

Решите неравенство:

1) $(2x-3)(5x+2)\ge(2x-3)(3x-8)$;

2) $(3x-1)(4x+3)\le(3x-1)(2x-5)$;

3) $(3x-7)^2\ge(7x-3)^2$;

4) $(5x-4)^2\ge(4x-5)^2$;

5) $x^2(x^2-16)\le 9(x^2-16)$;

6) $x^2(x^2-4)\ge 25(x^2-4)$;

7) $(x+1)(x-2)(x-1)^2\ge 0$;

8) $(x+3)(x-6)(x+2)^2\ge 0$;

9) $(5x-2)(3x^2-x-4)^2\ge(4x+1)(3x^2-x-4)^2$;

10) $(4x-1)(2x^2-x-3)^2\ge(3x+4)(2x^2-x-3)^2$;

11) $\dfrac{4}{x^2-4x}<\dfrac{1}{x-4}$;

12) $\dfrac{6}{x^2-6x}<\dfrac{1}{x-6}$;

13) $\dfrac{x-2}{x+7}>\dfrac{x-5}{x+4}$;

14) $\dfrac{x-3}{x+6}<\dfrac{x-4}{x+5}$;

15) $(3x^2+1)(x^2-6x+8)^2\cdot(2x-3)^3\cdot(5x-4)^8\geq 0$;

16) $(3x^2-4x+1)^4\geq(2x^2-3x+3)^4$;

17) $(9x^4-9x-10)^3\leq(8x^4-9x-9)^3$;

18) $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3)\geq 0$;

19) $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13)\leq 8$;

20) $|x^2-4|<|x+2|$;

21) $|x^2-1|>|x-1|$;

22) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}\leq\dfrac{1}{x-3}$;

23) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}\geq -3$.

Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых в но неравенство:

24) $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10)\leq 27$;

25) $7(x-5)^2+5(y-7)^2\leq 6$;

26) $x^2+4x+6\leq\dfrac{2}{y^2-6y+10}$;

27) $\dfrac{1}{2(x+5)^2}+\dfrac{2}{5(y-3)^2}\geq 0{,}9$;

28) $\dfrac{1}{9(x-7)^2+7(y-9)^2}\geq\dfrac{1}{8}$;

29) $\sqrt{x^2-6x+13}\cdot\sqrt{y^2+10y+34}\leq 6$.

При всех значениях параметра a решите неравенство:

30) $(a+1)x-3a+1\leq 0$;

31) $(a^2-1)x-2a+1>0$;

32) $ax+3(a-x)<8a-13x+1$;

33) $a^2(x+1)+a\leq x+2$;

34) $(a+1)x^2-2\geq 0$;

35) $ax>\dfrac{1}{x}$;

36) $ax^2+(a+1)x+1>0$;

37) $(a+2)x^2-(2a+1)x+a\ge 0$.

Ответы:

1) $x\in(-\infty;-5]\cup[1,5;\infty)$;

2) $x\in\left[-4;\dfrac{1}{3}\right]$;

3) $x\in[-1;1]$;

4) $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$;

5) $x\in[-4;-3]\cup[3;4]$;

6) $x\in(-\infty;-5]\cup[-2;2]\cup[5;\infty)$;

7) $x\in(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[2;\infty)$;

8) $x\in(-\infty;-3]\cup\{-2\}\cup[6;\infty)$;

9) $x\in\{-1\}\cup\left\{\dfrac{4}{3}\right\}\cup[3;\infty)$;

10) $x\in\{-1\}\cup\{1,5\}\cup[5;\infty)$;

11) $x\in(0;4)\cup(4;\infty)$;

12) $x\in(0;6)\cup(6;\infty)$;

13) $x\in(-\infty;-7)\cup(-4;\infty)$;

14) $x\in(-\infty;-6)\cup(-5;\infty)$;

15) $x\in\left\{\dfrac{4}{5}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right)$;

16) $x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$;

17) $x\in[-1;1]$;

18) $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right)$;

19) $x=-3$;

20) $x\in(1;3)$;

21) $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$;

22) $x\in(-1;2]\cup[3,5;7)$;

23) $x\in(-\infty;1)\cup\left[\dfrac{3}{2};2\right]\cup(3;\infty)$;

24) $(2;-1)$;

25) $(5;6)$, $(5;7)$, $(5;8)$;

26) $(-2; 3)$;

27) $(-4; 4), (-4; 2), (-6; 4), (-6; 2)$;

28) $(7; 8), (7; 10)$;

29) $(3; -5)$;

30) при $a \in (-\infty; -1)$ $x \in \left[\dfrac{3a-1}{a+1}; \infty\right)$; при $a = -1$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{3a-1}{a+1}\right]$;

31) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $x \in \left(\dfrac{2a-1}{a^2-1}; \infty\right)$, при $a = -1$ $x \in (-\infty; \infty)$, при $a = 1$ $x \in \varnothing$; при $a \in (-1; 1)$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{2a-1}{a^2-1}\right)$;

32) при $a \in (-\infty; -10)$ $x \in \left(\dfrac{5a+1}{a+10}; \infty\right)$, при $a = -10$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-10; \infty)$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{5a+1}{a+10}\right)$;

33) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{a+2}{a+1}\right]$, при $a = \pm 1$ $x \in (-\infty; \infty)$, при $a \in (-1; 1)$ $x \in \left[-\dfrac{a+2}{a+1}; \infty\right)$;

34) при $a \in (-\infty; -1]$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{2}{a+1}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{2}{a+1}}; \infty\right)$;

35) при $a \in (-\infty; 0]$ $x \in (-\infty; 0)$, при $a \in (0; \infty)$ $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{a}}; 0\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}; \infty\right)$;

36) при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in \left(-1; -\dfrac{1}{a}\right)$, при $a = 0$ $x \in (-1; \infty)$, при $a \in (0; 1)$ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{a}\right) \cup (-1; \infty)$, при $a \in [1; \infty)$ $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\dfrac{1}{a}; \infty\right)$;

37) при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in \left(\dfrac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4}; \dfrac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right)$, при $a = -2$

$x\in\left[\frac{2}{3};\infty\right)$, при $a\in\left(-2;\frac{1}{4}\right)$ $x\in\left(-\infty;\frac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right)\cup\left(\frac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4};\infty\right)$,

при $a\in\left[\frac{1}{4};\infty\right)$ $x\in(-\infty;\infty)$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 7–8. Множества и операции над ними

Цель: познакомить с элементами теории множеств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(2x-3)(x+1)\ge 0$;

б) $\frac{4x^2+4x-3}{x-1}\le 0$.

2. Найдите область определения функции $y=3\sqrt{6x-x^2}$.

Вариант 2

1. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(5x-2)(x+3)\le 0$;

б) $\frac{9x^2+3x-2}{x+2}\ge 0$.

2. Найдите область определения функции $y=2\sqrt{7x-x^2}$.

III. Изучение нового материала

Этот урок имеет вспомогательный характер: из теории множеств нужны простейшие понятия, необходимые для грамотной записи ответов в алгебраических задачах. Поэтому изложим материал урока предельно кратко и в минимально необходимом объеме для дальнейшего изучения курса 9 класса.

1. Понятие множества

Множеством называют совокупность элементов, отобранных по определенному признаку (признакам). Множество может содержать конечное или бесконечное количество элементов, а также вообще не иметь элементов (во многих случаях заранее неизвестно, будут ли в рассматриваемом множестве элементы).

Пример 1

а) Множество A простых делителей числа 30 состоит из трех элементов: 2; 3; 5.

б) Множество B натуральных четных чисел содержит бесконечное количество элементов: 2; 4; 6; ... .

в) Множество C корней уравнения $|x| + 3x^2 + 5 = 0$ не содержит ни одного элемента.

Если множество содержит небольшое число элементов, то обычно такое множество задают перечислением его элементов.

В примере 1а множество $A = \{2; 3; 5\}$. В случае бесконечного количества элементов множество также можно задавать перечислением нескольких первых элементов, так чтобы было понято правило отбора элементов множества. В примере 1б множество $B = \{2; 4; 6; ...\}$. Для наиболее часто встречающихся в математике числовых множеств есть специальные обозначения:

R – множество действительных чисел,

Q – множество рациональных чисел,

Z – множество целых чисел,

N – множество натуральных чисел.

Для обозначения пустого множества (т. е. множества, не содержащего элементов) вводится специальный символ $\varnothing$.

Вообще говоря, способы задания множеств могут быть самыми разнообразными.

Пример 2

а) Множество $\{x | 3 \le x < \sqrt{17}\}$ – множество всех чисел, которые не меньше 3 и меньше $\sqrt{17}$, т. е. промежуток $[3; \sqrt{17})$ или $\{x | 3 \le x < \sqrt{17}\} = [3; \sqrt{17})$.

б) Множество $\{x | x^2 - 4 < 0\}$ – множество решений неравенства $x^2 - 4 < 0$, т. е. промежуток $(-2; 2)$ или $\{x | x^2 - 4 < 0\} = (-2; 2)$.

в) Множество $\{x|(3x-2)(x+1)=0\}$ – множество решений уравнения $(3x-2)(x+1)=0$, т. е. числа $x_1=\dfrac{2}{3}$ и $x_2=-1$ или $\{x|(3x-2)(x+1)=0\}=\left\{\dfrac{2}{3};-1\right\}$.

Во многих случаях необходимо выяснить, является ли a элементом множества A (или принадлежит ли элемент a множеству A), и записать результат. Для подобных случаев существуют специальные обозначения:

$a\in A$ – элемент a принадлежит множеству A,

$a\notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A.

Пример 3

Пусть множество $A=\{2;\sqrt{5};4\}$. Тогда $\sqrt{5}\in A$, а $3\notin A$.

Для иллюстрации в теории множеств пользуются **диаграммами Эйлера**. Рассматривают в качестве множества A множество точек плоской фигуры. Тогда понятия принадлежности и непринадлежности элемента a множеству A можно изобразить наглядно.

2. Подмножество

Во многих случаях рассматривают не все элементы множества A, а только часть этих элементов. Тогда говорят, что эта часть элементов является подмножеством B множества A. Дадим более строгое определение подмножества.

Определение 1. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют подмножеством множества A.

Такую ситуацию обозначают символом $\subset$ (знак $\subset$ – знак включения), т. е. $B\subset A$. Наглядно подмножество можно иллюстрировать диаграммой Эйлера.

Пример 4

Рассмотрим множество $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, состоящее из трех элементов. Какие подмножества есть у этого трехэлементного множества? Перечислим их.

Одноэлементные подмножества: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

Двухэлементные подмножества: $\{1;\ 2\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{1;\ 3\}$.

Трехэлементное подмножество – само множество $A = \{1;\ 2;\ 3\}$.

Подмножество без элементов – пустое множество $\varnothing$.

Всего можно получить $2^3 = 8$ подмножеств. Вообще говоря, множество, состоящее из n элементов, содержит 2^n подмножеств.

Пример 5

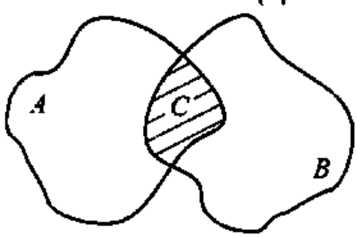
Разберемся с основными числовыми множествами. Очевидно, множество натуральных чисел N – часть множества целых чисел Z, которое, в свою очередь, – часть множества рациональных чисел Q. Последнее множество Q – часть множества действительных чисел R.

Весь этот абзац математически записывается кратко и четко: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

3. Пересечение и объединение множеств

Рассмотрим две основные **операции над множествами**: пересечение и объединение множеств.

Определение 2. Пересечением множеств A и B называют множество C, состоящее из всех общих элементов множеств A и B. Это множество обозначают так: $C = A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \text{ и } x \in B\right\}$.



Пример 6

Пусть $A = \{1;\ 5;\ 7;\ 2;\ 3\}$ и $B = \{3;\ 5;\ 4;\ 8;\ 1\}$.

Найдем пересечение этих множеств $C = A \cap B = \{1;\ 3;\ 5\}$.

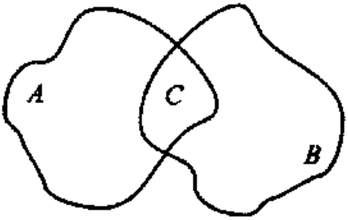
Пример 7

Пусть множество $A = [2;\ 7]$ и множество $B = (3;\ 9)$.

Очевидно, пересечением этих промежутков является множество $C = A \cap B = (3;\ 7]$.

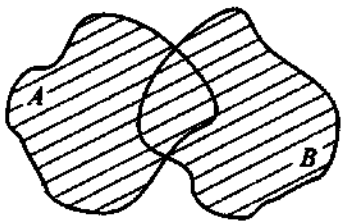
Пример 8

После страшной битвы вся команда пиратского корабля получила ранения: ранены в руку – 40 человек, в ногу – 80 пиратов, невезучие (ранены и в руку, и в ногу) – 30 человек. Сколько пиратов в команде корабля?



Пусть A – множество человек, раненных в руку (40 чел.), B – множество пиратов, раненных в ногу (80 чел.), и $C = A \cap B$ – множество человек, получивших два ранения (30 чел.). Найдем число пиратов, раненных только в руку: $40 - 30 = 10$ – и только в ногу: $80 - 30 = 50$. Так как каждый пират имеет хотя бы одно ранение, то всего пиратов: $10 + 50 + 30 = 90$ человек.

Определение 3. Объединением множества A **и** B называют множество C, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Это множество обозначают так: $C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.



Пример 9 (сравните с примером 6)

Пусть $A = \{1; 5; 7; 2; 3\}$ и $B = \{3; 5; 4; 8; 1\}$. Найдем объединение этих множеств $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Пример 10 (сравните с примером 7)

Пусть множество $A = [2; 7]$ и множество $B = (3; 9)$. Очевидно, объединением этих промежутков является множество $C = A \cup B = [2; 9)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называют множеством?
2. Как обозначаются основные числовые множества?

3. Определение подмножества B множества A.
4. Операция пересечение множеств.
5. Объединение множеств.

V. Задание на уроках

§ 3, № 1 (а, в); 3 (а, г); 7; 10; 12 (а, в); 13; 15 (а, г); 20 (б); 23.

VI. Задание на дом

§ 3, № 1 (б, г); 3 (б, в); 8; 11; 12 (б, г); 14; 15 (б, в); 20 (в); 24.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 9–11. Системы неравенств

Цель: рассмотреть решение системы неравенств с одной переменной.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Пересечение множеств A и B.

2. Даны множества $A = \{3; 1; 4; 2; 7\}$ и $B = \{1; 8; 6; 3; 2\}$. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

3. Даны множества $A = [-3; 5)$ и $B = (-1; 8)$. Найдите пересечение и объединение этих промежутков.

Вариант 2

1. Объединение множеств A и B.

2. Даны множества $A = \{2; 5; 1; 8; 3\}$ и $B = \{9; 4; 3; 5; 2\}$. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

3. Даны множества $A = [-4; 7)$ и $B = [-2; 10)$. Найдите пересечение и объединение этих промежутков.

III. Изучение нового материала

Часто возникает задача нахождения общих решений нескольких неравенств с одной переменной. Тогда возникает понятие **системы неравенств**.

Определение. Несколько неравенств с одной переменной x образуют **систему неравенств**, если необходимо найти все значения переменной, при которых каждое неравенство обращается в верное числовое неравенство (т. е. найти общие решения данных неравенств). Любое такое значение переменной x называют решением (или частным решением) системы неравенств. Множество всех частных решений системы неравенств является общим решением системы неравенств (или, проще, решением системы неравенств).

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой (как и в системах уравнений) или записываются в виде двойного неравенства.

Пример 1

а) Запись $\begin{cases} 3x-2 \geq 1, \\ 2x-1<3 \end{cases}$ означает, что неравенства $3x - 2 \geq 1$ и $2x - 1 < 3$ образуют систему и необходимо искать общие решениях этих неравенств.

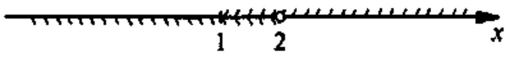
б) Запись $2x - 1 < 3x + 2 \leq 4x + 3$ эквивалентна записи $\begin{cases} 2x-1<3x+2, \\ 3x+2 \leq 4x+3. \end{cases}$ Тогда неравенства $2x - 1 < 3x + 2$ и $3x + 2 \leq 4x + 3$ образуют систему и необходимо искать общие решения этих неравенств.

Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Поэтому для решения системы неравенств пользуются определением: решают каждое неравенство системы отдельно, потом находят общее решение из ранее полученных.

Пример 2

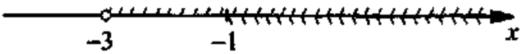
Решим системы неравенств из примера 1.

а) Для системы линейных неравенств $\begin{cases} 3x-2 \geq 1, \\ 2x-1<3 \end{cases}$ решение первого неравенства $x \geq 1$, второго неравенства – $x < 2$. Отметим эти решения на одной координатной прямой штриховкой: для первого неравенства – сверху, для второго неравенства – снизу.



Видно, что общими решениями (т. е. решением системы неравенств) является промежуток [1; 2). Этот промежуток будет пересечением множеств решений каждого неравенства: $x_1 = [1; +\infty)$ и $x_2 = (-\infty; 2)$ – область двойной штриховки.

б) Для системы линейных неравенств $\begin{cases} 2x-1<3x+2, \\ 3x+2 \le 4x+3 \end{cases}$ решение первого неравенства $x > -3$, второго неравенства – $x \ge -1$. Отметим эти решения на одной координатной прямой штриховкой: для первого неравенства – сверху, для второго неравенства – снизу.



Видно, что общими решениями (т. е. решением системы неравенств или двойного неравенства) является промежуток $[-1; +\infty)$. Этот промежуток будет пересечением множеств решений каждого неравенства: $x_1 = (-3; +\infty)$ и $x_2 = [-1; +\infty)$ – область двойной штриховки.

Учитывая пример 2, можем сформулировать **алгоритм решения системы** неравенств $\begin{cases} f(x) \vee 0, \\ g(x) \vee 0: \end{cases}$

1) находят множество x_1 решений неравенства $f(x) \vee 0$ и множества x_2 решений неравенства $g(x) \vee 0$;

2) находят пересечение $x_1 \cap x_2$ этих множеств, которое и является решением данной системы неравенств.

При решении систем неравенств полезно учитывать два очевидных соображения:

1) если в системе из нескольких неравенств одно неравенство не имеет решений, то и вся система не имеет решений;

2) если в системе из нескольких неравенств одно неравенство выполняется при всех значениях переменной, то решением является решение системы, образованной остальными неравенствами.

Пример 3

а) Решим систему неравенств $\begin{cases} 4x^2+1<4x, \\ 5x-8 \ge 0. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} 4x^2-4x+1<0, \\ 5x-8 \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (2x-1)^2<0, \\ 5x-8 \ge 0. \end{cases}$

Очевидно, что первое неравенство системы не имеет решений. Тогда и вся система неравенств не имеет решений, т. е. $x \in \varnothing$.

б) Решим систему неравенств $\begin{cases} 4x^2+1\geq 4x, \\ 5x-8\geq 0. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} (2x-1)^2\geq 0, \\ 5x-8\geq 0. \end{cases}$ Решением первого неравенства является любое действительное число x, т. е. $x\in R$. Поэтому достаточно решить второе неравенство $5x - 8 \geq 0$. Его решение $x\in[1{,}6;+\infty)$ является также решением всей системы неравенств.

По изложенному алгоритму решаются и более *сложные системы* неравенств.

Пример 4

Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2+4x+3\leq 0, \\ x^2+3x+2\geq 0. \end{cases}$

Для решения используем аналитический (метод интервалов) и графический способы.

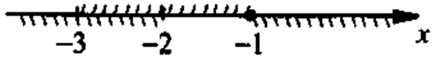
а) Решим сначала первое неравенство $x^2 + 4x + 3 \leq 0$. Найдем корни соответствующего уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$: $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Нанесем эти точки на числовую ось, которые разбивают ее на три интервала. Определим знак выражения $x^2 + 4x + 3$, например, при $x = 0$: $0^2 + 4\cdot 0 + 3 = 3 > 0$. После этого легко нарисовать диаграмму знаков рассматриваемого выражения.

Видно, что неравенство выполняется при $x\in[-3;-1]$.

Теперь рассмотрим второе неравенство $x^2 + 3x + 2 \geq 0$. Корни этого выражения $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$. Наносим эти точки на числовую ось. Определяем знак выражения $x^2 + 3x + 2$, например, при $x = 5$: $5^2 + 3\cdot 5 + 2 = 42 > 0$. Рисуем диаграмму знаков для этого выражения.

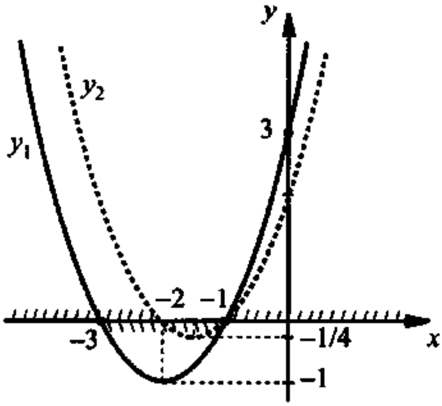
Видно, что неравенство выполняется для $x\in(-\infty;-2]\cup[-1;+\infty)$.

Найдем те значения x, при которых выполнены оба неравенства. Для этого еще раз нанесем решения первого (штриховка сверху) и второго (штриховка снизу) неравенств на числовую ось. Видно, что оба неравенства выполнены для промежутка $x\in[-3;-2]$ и в отдельной точке $x=-1$.



Итак, решение данной системы неравенств $x \in [-3; -2] \cup \{-1\}$.

б) Построим графики функций $y_1 = x^2 + 4x + 3$ и $y_2 = x^2 + 3x + 2$. Видно, что неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$ (график y_1 находится не выше оси абсцисс) выполнено для $x \in [-3; -1]$. Неравенство $x^2 + 3x + 2 \ge 0$ (график y_2 находится не ниже оси абсцисс) выполнено при $x \in [-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. Оба неравенства выполнены для $x \in [-3; -2] \cup \{-1\}$.



При решении систем неравенств целесообразно начинать решение с самого простого неравенства.

Пример 5

Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x^4 + 5x + 1 \ge 0, \\ x^5 + 6x^2 > 0, \\ 3x - 2 \ge 0. \end{cases}$

Решение системы начнем с третьего неравенства. Его решение: $x \ge \dfrac{2}{3}$ (тогда $x > 0$). Очевидно, что при положительных значениях x каждое слагаемое в левых частях первого и второго неравенств положительно. Поэтому первое и второе неравенства выполнены. Следовательно, решение третьего неравенства $x \in \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$ является также решением всей системы неравенств.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение системы неравенств.
2. Частное и общее решения системы неравенств.
3. Алгоритм решения системы неравенств.

V. Задание на уроках

§ 4, № 1 (а, б); 2 (а); 6 (а, г); 9 (а, б); 12 (г); 14 (а, б); 17 (в, г); 18; 23 (а); 26 (г); 29 (б); 31 (а); 35 (а, б); 36 (в, г); 38 (а, б); 39 (а).

VI. Задание на дом

§ 4, № 1 (в, г); 2 (б); 6 (б, в); 9 (в, г); 12 (б); 14 (в, г); 17 (а, б);.19; 23 (б); 26 (а); 29 (г); 31 (б); 35 (в, г); 36 (а, б); 38 (в, г); 39 (б).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 12–13. Контрольная работа по теме «Неравенства и системы неравенств»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом количество вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $3(2x-3)-2(3x-2)\le 1-4x$;

б) $\dfrac{x^2}{2}\ge\dfrac{2x+2}{3}$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases}3x\le x-5,\\4x+6<0,\\x+1\ge 3x+5.\end{cases}$

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{x^2+9}}$?

4. Решите неравенство $|2x-1|\le 3$.

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $(a-2)x>a^2-4$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $4(3x-4)-3(4x-3)\le 1-5x$;

б) $\dfrac{11x-4}{5}\ge\dfrac{x^2}{2}$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases}x\ge 3x+1,\\6x+1\ge 4x-2,\\5x+5>0.\end{cases}$

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{\dfrac{x^2+x-12}{x^2+4}}$?

4. Решите неравенство $|2x+1|\le 5$.

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $(a+3)x<a^2-9$.

Вариант 3

1. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{3}-2)(x-2)\ge 1$;

б) $(x+7)^2\le(2x-3)^2$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3}{5} - \dfrac{2-4x}{3} \le \dfrac{2x-3}{2}, \\ \dfrac{2x-27}{2} \ge 4x. \end{cases}$

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+3}}$?

4. Решите неравенство $(2|x|-4)\sqrt{3x-4} \le 0$.

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $x^2 - 3ax + 2a^2 \le 0$.

Вариант 4

1. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{5}-3)(x-1) \le 4$;

б) $(x-3)^2 \ge (2x+7)^2$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{1+2x}{4} \le \dfrac{5+4x}{10} - \dfrac{2}{5}, \\ 2x \ge \dfrac{14x+17}{2}. \end{cases}$

3. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-2}}$?

4. Решите неравенство $(3|x|-6)\sqrt{5x-6} \le 0$.

5. При всех значениях параметра a решите неравенство $x^2 - 4ax + 3a^2 \ge 0$.

Вариант 5

1. Какие значения может принимать переменная y, если $3x + 2y = 6$ и $|x| \le 8$?

2. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2-x-30}{x+1}} \ge -1$.

3. Решите неравенство $(5x-2)(3x^2-x-4)^2 \ge (4x+1)(3x^2-x-4)^2$.

4. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} 5-x<2, \\ x+6<a+1 \end{cases}$ имеет ровно три целых решения?

5. Найдите все пары (x; y) чисел x и y, для которых выполнено неравенство $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10)\le 27$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $x^2-(3a+1)x+2a^2+2a\ge 0$.

Вариант 6

1. Какие значения может принимать переменная x, если $4x+3y=8$ и $|y|\le 12$?

2. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2+x-42}{x-1}}\ge -1$.

3. Решите неравенство $(4x-1)(2x^2-x-3)^2\ge(3x+4)(2x^2-x-3)^2$.

4. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases}4+x>1,\\ x-5<a-2\end{cases}$ имеет ровно три целых решения?

5. Найдите все пары (x; y) чисел x и y, для которых выполнено неравенство $(x^2-2x+9)(y^2+4y+7)\le 24$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $x^2-(3a+1)x+2a^2+a\le 0$.

Урок 14. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты контрольной работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
∅	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число нерешивших задачу;

∅ – число нерешавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (поместить на стенд ответы к заданиям вариантов и разобрать наиболее трудные варианты).

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. а) $x \in (-\infty; 1{,}5]$; б) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

2. $x \in (-\infty; -2{,}5]$.

3. $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

4. $x \in [-1; 2]$.

5. При $a \in (-\infty; 2)$ $x \in (-\infty; a+2)$, при $a = 2$ $x \in \varnothing$, при $a \in (2; +\infty)$ $x \in (a+2; +\infty)$.

Вариант 2

1. а) $x \in (-\infty; 1{,}6]$; б) $x \in \left[\frac{2}{5}; 4\right]$.

2. $x \in (-1; -0{,}5]$.

3. $x \in (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

4. $x \in [-3; 2]$.

5. При $a \in (-\infty; -3)$ $x \in (a-3; +\infty)$, при $a = -3$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in (-\infty; a-3)$.

Вариант 3

1. а) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}]$; б) $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [10; +\infty)$.

2. $x \in (-\infty; -4{,}5]$.

3. $x \in (-3; -2] \cup [2; +\infty)$.

4. $x \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

5. При $a \in (-\infty; 0)$ $x \in [2a; a]$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a \in (0; +\infty)$ $x \in [a; 2a]$.

Вариант 4

1. а) $x \in [-2-\sqrt{5}; +\infty)$; б) $x \in \left[-10; -\frac{4}{3}\right]$.

2. $x \in (-\infty; -1,7]$.

3. $x \in (-3; 2] \cup [3; +\infty)$.

4. $x \in \left[\frac{6}{5}; 2\right]$.

5. При $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; 3a] \cup [a; +\infty)$, при $a = 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (0; +\infty)$ $x \in (-\infty; a] \cup [3a; +\infty)$.

Вариант 5

1. Из равенства $3x + 2y = 6$ выразим переменную $y = \frac{6-3x}{2} = 3 - 1,5x$. С учетом геометрического смысла модуля неравенство $|x| \le 8$ равносильно неравенству $-8 \le x \le 8$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число $(-1,5)$. При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получаем: $12 \ge -1,5x \ge -12$. Прибавим ко всем частям неравенства число 3. Имеем: $15 \ge 3 - 1,5x \ge -9$, т. е. $y \in [-9; 15]$.

Ответ: $y \in [-9; 15]$.

2. По определению квадратный корень – величина неотрицательная. Поэтому данное неравенство выполнено, если x входит в ОДЗ. Эта область задается неравенством $\frac{x^2 - x - 30}{x+1} \ge 0$, решение которого $x \in [-5; -1) \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-5; -1) \cup [6; +\infty)$.

3. Перенесем все члены неравенства в левую часть и запишем его в виде $(x-3)(3x^2 - x - 4)^2 \ge 0$. Выражение $(3x^2 - x - 4)^2$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{4}{3}$ (и эти числа – решения неравенства). При остальных x выражение $(3x^2 - x - 4)^2 > 0$. Поэтому при таких x неравенство равносильно неравенству $x - 3 \ge 0$, решение которого

$x \geq 3$. Решение данного неравенства состоит из двух отдельных точек и промежутка $x \in \left\{-1; \frac{4}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left\{-1; \frac{4}{3}\right\} \cup [3; +\infty)$.

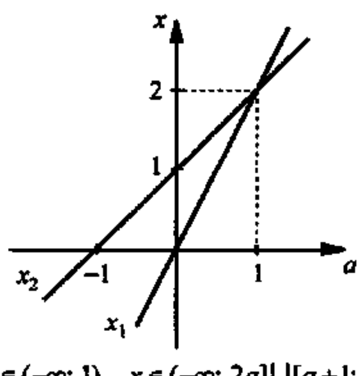
4. Решим каждое неравенство системы $\begin{cases} x > 3, \\ x < a-5. \end{cases}$ Тогда решение системы неравенств – промежуток $x \in (3; a-5)$. Необходимо, чтобы в этот промежуток попали ровно три целых числа: 4; 5; 6. Получаем условие: $6 < a - 5 \leq 7$, откуда $11 < a \leq 12$.

Ответ: $a \in (11; 12]$.

5. Выделим полные квадраты по переменным x и y: $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 \geq 3$ и $y^2 + 2y + 10 = (y+1)^2 + 9 \geq 9$. Неравенства одного знака с положительными частями можно умножить. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $(x^2 - 4x + 7)(y^2 + 2y + 10) \geq 3 \cdot 9$ или $(x^2 - 4x + 7)(y^2 + 2y + 10) \geq 27$. Видно, что данное неравенство выполняется только при $x = 2$ и $y = -1$.

Ответ: $(2; -1)$.

6. Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a$. Эти корни $x_1 = 2a$ и $x_2 = a + 1$. Изобразим зависимости x_1 и x_2 от a. Корни $x_1 = x_2 = 2$ при $a = 1$. Очевидно, что данное неравенство выполняется в промежутках, расположенных за корнями x_1 и x_2. Поэтому получаем ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty; 2a] \cup [a+1; +\infty)$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a > 1$ $x \in (-\infty; a+1] \cup [2a; +\infty)$.



Ответ: при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (-\infty; 2a] \cup [a+1; +\infty)$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; a+1] \cup [2a; +\infty)$.

Вариант 6

1. Из равенства $4x + 3y = 8$ выразим переменную $x = \frac{8-3y}{4} = 2 - \frac{3}{4}y$. С учетом геометрического смысла модуля неравенство $|y| \le 12$ равносильно неравенству $-12 \le y \le 12$. Умножим все части этого неравенства на отрицательное число $\left(-\frac{3}{4}\right)$. При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получаем: $9 \ge -\frac{3}{4}y \ge -9$. Прибавим ко всем частям неравенства число 2. Имеем: $11 \ge 2 - \frac{3}{4}y \ge -7$, т. е. $x \in [-7; 11]$.

Ответ: $x \in [-7; 11]$.

2. По определению квадратный корень – величина неотрицательная. Поэтому данное неравенство выполнено, если x входит в ОДЗ. Эта область задается неравенством $\frac{x^2 + x - 42}{x-1} \ge 0$, решение которого $x \in [-7; 1) \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-7; 1) \cup [6; +\infty)$.

3. Перенесем все члены неравенства в левую часть и запишем его в виде $(x-5)(2x^2 - x - 3)^2 \ge 0$. Выражение $(2x^2 - x - 3)^2$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1{,}5$ (и эти числа – решения неравенства). При остальных x выражение $(2x^2 - x - 3)^2 > 0$. Поэтому при таких x неравенство равносильно неравенству $x - 5 \ge 0$, решение которого $x \ge 5$. Решение данного неравенства состоит из двух отдельных точек и промежутка $x \in \{-1; 1{,}5\} \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $x \in \{-1; 1{,}5\} \cup [5; +\infty)$.

4. Решим каждое неравенство системы $\begin{cases} x > -3, \\ x < a+3. \end{cases}$ Тогда решение системы неравенств – промежуток $x \in (-3; a+3)$. Необходимо, чтобы в этот промежуток попали ровно три целых числа: -2; -1; 0. Получаем условие: $0 < a + 3 \le 1$, откуда $-3 < a \le -2$.

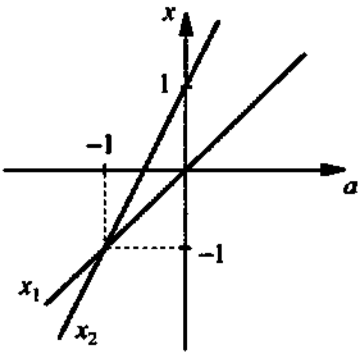
Ответ: $a \in (-3; -2]$.

5. Выделим полные квадраты по переменным x и y: $x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 \ge 8$ и $y^2 + 4y + 7 = (y+2)^2 + 3 \ge 3$. Неравен-

ства одного знака с положительными частями можно умножить. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $(x^2-2x+9)(y^2+4y+7)\ge 8\cdot 3$ или $(x^2-2x+9)(y^2+4y+7)\ge 24$. Видно, что данное неравенство выполняется только при $x=1$ и $y=-2$.

Ответ: (1; –2).

6. Найдем корни квадратного трехчлена $x^2-(3a+1)x+2a^2+a$. Эти корни $x_1=a$ и $x_2=2a+1$. Изобразим зависимости x_1 и x_2 от a. Корни $x_1=x_2=-1$ при $a=-1$. Очевидно, что данное неравенство выполняется в промежутке, расположенном между корнями x_1 и x_2. Поэтому получаем ответ: при $a<-1$ $x\in[2a+1;\,a]$, при $a=-1$ $x=-1$, при $a>-1$ $x\in[a;\,2a+1]$.



Ответ: при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in[2a+1;\,a]$, при $a=-1$ $x=-1$, при $a\in(-1;+\infty)$ $x\in[a;\,2a+1]$.

Уроки 15–16. Зачетная работа по теме «Неравенства и системы неравенств»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока A, B и C. Самые простые задачи находятся в части A, более сложные – в части B, еще сложнее – в части C. Каждая задача из части A оценивается в 1 балл, из B – в 2 балла, из C – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока A можно получить 7 баллов, блока B – 8 баллов и блока C – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

A

1. Решите неравенство $x+\frac{8-11x}{12}>\frac{7+x}{4}-\frac{5-x}{3}$.

2. Найдите все решения неравенства $\frac{2x^2}{9}\le\frac{x+3}{3}$, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{2x+5}{5}>\frac{5x+2}{2},\\ \frac{x+2}{5}<\frac{x+5}{2}.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $5\le 4-\frac{3}{4}x<7$.

5. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$?

6. Решите неравенство $2|x|-x\ge 6$.

7. При всех значениях параметра a решите неравенство $(x-3)(x+a)\le 0$.

B

8. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2\right)(10+3x)\ge 0$.

9. Решите неравенство $(x+3)(x-2)(x-5)^2\le 0$.

10. При каких значениях параметра a неравенство $x^2-(2a+2)x+3a+7>0$ выполняется при всех значениях x?

11. Решите неравенство $|x+3|+|x-2|\geq 9$.

С

12. Решите неравенство $|4x^2-12x+5|(5x^2-12x+4)\geq 0$.

13. Решите двойное неравенство $\frac{4}{x}-3<\frac{1}{x^2}\leq\frac{5}{x}+6$.

14. Найдите все пары $(x;\ y)$ чисел x и y, для которых выполняется неравенство $x^2-6x+11\leq\frac{4}{y^2+4y+6}$.

Вариант 2

А

1. Решите неравенство $\frac{13x-1}{15}-\frac{2x-1}{5}<x-\frac{x-2}{3}$.

2. Найдите все решения неравенства $\frac{3x^2}{4}\leq\frac{4-5x}{2}$, принадлежащие промежутку $[-1;\ 1]$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{3x+2}{2}>\frac{2x+3}{3},\\ \frac{x+2}{3}<\frac{x+3}{2}.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $3<4-\frac{2}{3}x\leq 5$.

5. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$?

6. Решите неравенство $x-2|x|\leq 3$.

7. При всех значениях параметра a решите неравенство $(x+2)(x-a)\geq 0$.

В

8. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1\right)(4x-13)\leq 0$.

9. Решите неравенство $(x+3)^2(2-x)(x-5)\leq 0$.

10. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1>0$ выполняется при всех значениях x?

11. Решите неравенство $|x-5|+|x+4|\leq 11$.

С

12. Решите неравенство $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3)\ge 0$.

13. Решите двойное неравенство $\frac{3}{x}-2\le\frac{1}{x^2}<\frac{6}{x}+7$.

14. Найдите все пары $(x;\,y)$ чисел x и y, для которых выполняется неравенство $x^2+4x+6\le\frac{2}{y^2-6y+10}$.

Ответы

Вариант 1

1. $x\in\left(-\infty;\,\frac{7}{6}\right)$.

2. $x\in[-1{,}5;\,2]$.

3. $x\in(-7;\,0)$.

4. $x\in\left(-4;\,-\frac{4}{3}\right]$.

5. $x\in(-\infty;\,-2)\cup[3;\,+\infty)$.

6. $x\in(-\infty;\,-2]\cup[6;\,+\infty)$.

7. При $a\in(-\infty;\,-3)$ $x\in[3;\,-a]$, при $a=-3$ $x=3$, при $a\in(-3;\,+\infty)$ $x\in[-a;\,3]$.

8. $x\in\left(-\infty;\,-\frac{10}{3}\right]$.

9. $x\in[-3;\,2]\cup\{5\}$.

10. $a\in(-2;\,3)$.

11. $x\in(-\infty;\,-5]\cup[4;\,+\infty)$.

12. Выражение $|4x^2-12x+5|$ обращается в нуль при $x_1=0{,}5$ и $x_2=2{,}5$ (и эти числа – решения неравенства). Для остальных x это выражение положительно. Поэтому неравенство равносильно неравенству $5x^2-12x+4\ge 0$, решение которого $x\in(-\infty;\,0{,}4]\cup[2;\,+\infty)$. Точка $x=2{,}5$ входит в промежуток $[2;\,+\infty)$. Поэтому решение исходного неравенства $x\in(-\infty;\,0{,}4]\cup\{0{,}5\}\cup[2;\,+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,0{,}4]\cup\{0{,}5\}\cup[2;\,+\infty)$.

13. Данное двойное неравенство равносильно системе нера-

венств $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-3<\dfrac{1}{x^2}, \\ \dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{5}{x}+6 \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{4x^2-x-3}{x^2}<0, \\ 0\le\dfrac{6x^2+5x-1}{x^2}. \end{cases}$ Тогда решение нера-

венств $\begin{cases} x\in\left(-\dfrac{3}{4};\,0\right)\cup(0;\,1), \\ x\in(-\infty;\,-1]\cup\left[\dfrac{1}{6};\,+\infty\right). \end{cases}$ Получаем решение исходной сис-

темы неравенств $x\in\left[\dfrac{1}{6};\,1\right)$.

Ответ: $x\in\left[\dfrac{1}{6};\,1\right)$.

14. Оценим обе части неравенства. Для этого выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $x^2-6x+11=$ $=(x-3)^2+2\ge2$ и $y^2+4y+6=(y+2)^2+2\ge2$, и тогда $\dfrac{4}{y^2+4y+6}=$ $=\dfrac{4}{(y+2)^2+2}\le\dfrac{4}{2}=2$. Имеем: левая часть неравенства не меньше 2, а правая часть не больше 2. Поэтому исходное неравенство выполняется только при $x=3$ и $y=-2$.

Ответ: $(3;\,-2)$.

Вариант 2

1. $x\in\left(-\dfrac{8}{3};\,+\infty\right)$.
2. $x\in\left[-1;\,\dfrac{2}{3}\right]$.
3. $x\in(0;\,+\infty)$.
4. $x\in[-1,5;\,1,5]$.
5. $x\in(-\infty;\,-3]\cup(2;\,+\infty)$.
6. $x\in(-\infty;\,+\infty)$.
7. При $a\in(-\infty;\,-2)$ $x\in(-\infty;\,a]\cup[-2;\,+\infty]$, при $a=-2$ $x\in(-\infty;\,+\infty)$, при $a\in(-2;\,+\infty)$ $x\in(-\infty;\,-2]\cup[a;\,+\infty)$.
8. $x\in\left[\dfrac{13}{4};\,+\infty\right)$.

9. $x \in \{-3\} \cup [2;\ 5]$.

10. $a \in (1;\ 3)$.

11. $x \in [-5;\ 6]$.

12. Выражение $|3x^2-11x+6|$ обращается в нуль при $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2 = 3$ (и эти числа – решения неравенства). Для остальных x это выражение положительно. Поэтому неравенство равносильно неравенству $6x^2-11x+3 \geq 0$, решение которого $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cup [1{,}5;\ +\infty)$. Точка $x = 3$ входит в промежуток $[1{,}5;\ +\infty)$. Поэтому решение исходного неравенства $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup [1{,}5;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup [1{,}5;\ +\infty)$.

13. Данное двойное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} \frac{3}{x}-2 \leq \frac{1}{x^2}, \\ \frac{1}{x^2} < \frac{6}{x}+7 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \leq \frac{2x^2-3x+1}{x^2}, \\ 0 < \frac{7x^2+6x-1}{x^2}. \end{cases}$ Тогда решение неравенств $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 0{,}5] \cup [1;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{1}{7};\ +\infty\right). \end{cases}$ Получаем решение исходной системы неравенств $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{1}{7};\ 0{,}5\right] \cup [1;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(\frac{1}{7};\ 0{,}5\right] \cup [1;\ +\infty)$.

14. Оценим обе части неравенства. Для этого выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $x^2+4x+6 = (x+2)^2+2 \geq 2$ и $y^2-6y+10=(y-3)^2+1 \geq 1$, и тогда $\frac{2}{y^2-6y+10} = \frac{2}{(y-3)^2+1} \leq \frac{2}{1} = 2$. Имеем: левая часть неравенства не меньше 2, а правая часть не больше 2. Поэтому исходное неравенство выполняется только при $x = -2$ и $y = 3$.

Ответ: $(-2;\ 3)$.

Глава 2
Системы уравнений

В этой главе обсудим системы уравнений с двумя переменными. Такие системы очень часто представляют собой математические модели рассматриваемых ситуаций. Такие ситуации возникают при решении текстовых и геометрических задач, при анализе функций и т. д.

Уроки 17–18. Основные понятия

Цель: ввести основные понятия и термины темы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

1. Рациональные уравнения с двумя переменными

Равенство, содержащее две переменные, называют **уравнением с двумя переменными** (или неизвестными). **Решением уравнения** с двумя переменными называют пару значений неизвестных, которые обращают это уравнение в верное равенство. Уравнение с двумя переменными может иметь бесконечное множество решений или ограниченное число решений, а также не иметь решений.

Пример 1

Рассмотрим следующие уравнения с двумя переменными.

а) Уравнение $3x + 7y = 10$ (уравнение прямой) имеет бесконечное множество решений.

б) Уравнение $|x - 1| + y^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 1$, $y = 0$.

в) Уравнение $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$ имеет четыре решения: $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $y = -2$; $x = -1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$.

г) Уравнение $|x - 1| + (y - 2)^2 = -5$ не имеет решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют **равносильными**.

Пример 2

а) Уравнения $|x| + (y-1)^2 = 0$ и $x^2 + |y - 1| = 0$ равносильны, так как имеют одно и то же решение $x = 0$ и $y = 1$.

б) Уравнения $|x| + (y-1)^2 = 0$ и $x^2 + |y^2 - 1| = 0$ неравносильны, так как первое имеет одно решение $x = 0$, $y = 1$, а второе – два решения: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 0$, $y = -1$.

Уравнение вида $h(x; y) = g(x; y)$ (где $h(x; y)$, $g(x; y)$ – рациональные выражения) называют **рациональным уравнением с двумя переменными** x и y.

Пример 3

а) Уравнения $3x + y = 4$; $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = 1$; $x^2 + y^2 = 4$; $3x^2y + 2xy^2 = 5$ рациональные (по определению).

б) Уравнения $3\sqrt{x} = y$; $x^3 + \sqrt{x+y} = 2$; $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4$ не являются рациональными, так как содержат операцию извлечения квадратного корня.

Целым уравнением называют рациональное уравнение, которое не содержит операцию деления на выражение с переменной.

Пример 4

а) Уравнения $2x + 3y = 5$; $x^2 + 4y^2 = 5$; $xy = 2$; $x^3 + 2y^2 = 3$ целые (по определению).

б) Уравнения $\frac{x}{y} + \frac{x-y}{x} = 1$; $\frac{x^2+y^2}{3xy} = 2$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5$; $\frac{xy}{x-y} = 2$ не являются целыми, так как содержат операцию деления на выражение с переменной.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной. Если одна часть уравнения представляет собой многочлен стандартного вида, а другая – число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена. Для определения степени уравнения его заменяют равносильным, одна часть которого – многочлен стандартного вида, а другая – нуль.

Пример 5

Уравнение $(x^3 + 2y^2)^2 = x^6 - 2x^2y$ равносильно уравнению $x^6 + 4x^3y^2 + 4y^4 = x^6 - 2x^2y$ и равносильно уравнению $2x^3y^2 + 2y^4 + x^2y = 0$. Поэтому данное уравнение является уравнением пятой степени.

В случае целых уравнений распространены задачи, в которых надо найти **целочисленные решения**. Такие задачи рассматриваются уже свыше двух тысяч лет. Несмотря на это, общего алгоритма решения подобных уравнений (их называют диафантовыми уравнениями) не существует. Мы, естественно, ограничимся самыми простыми уравнениями.

Пример 6

Найдем целочисленные решения уравнения $3x + 6y = 391$.

Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение в виде $3(x + 2y) = 391$. Так как по условию x и y – целые числа, то выражение $x + 2y$ также является целым числом. Поэтому левая часть уравнения $3(x + 2y)$ – число, кратное 3. Правая часть – число 391 – делится на 3 с остатком. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение целочисленных решений не имеет.

Пример 7

Найдем целочисленные решения уравнения $4x + 3y = 11$.

Из выражения $4x + 3y = 11$ получим переменную $y = \frac{11-4x}{3}$. Так как знаменатель этой дроби равен 3, то рассмотрим различные целые числа x по отношению к делителю 3. Возможны три ситуации:

а) число x кратно 3, т. е. $x = 3n$ (где $n \in Z$). Тогда $y = \frac{11-4\cdot 3n}{3} = \frac{11}{3} - 4n$ не является целым числом;

б) число x при делении на 3 дает остаток 1, т. е. $x = 3n + 1$. Тогда $y = \frac{11-4(3n+1)}{3} = \frac{7-12n}{3} = \frac{7}{3} - 4n$ не является целым числом;

в) число x при делении на 3 дает остаток 2, т. е. $x = 3n + 2$. Тогда $y = \frac{11-4(3n+2)}{3} = \frac{3-12n}{3} = 1-4n$ является целым числом.

Таким образом, данное уравнение имеет бесконечное множество целочисленных решений $(3n + 2;\ 1 - 4n)$, где $n \in Z$. Для наглядности в таблице приведены некоторые такие решения для некоторых значений n.

n	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14
y	17	13	9	5	1	–3	–7	–11	–15

Рассмотрим теперь целые уравнения второй степени.

Пример 8

Найдем целочисленные решения уравнения $x^2 - 2xy - 3y^2 = -3$.

Учтем, что левая часть уравнения – однородный многочлен второй степени по переменным x и y, и разложим его на множители. Будем считать, что x – переменная величина, а y – постоянная. По формулам Виета найдем корни квадратного уравнения $x^2-2xy-3y^2=0$. Получаем: $x=y\pm\sqrt{y^2+3y^2}=y\pm 2y$, т. е. $x_1=3y$ и $x_2=-y$. Тогда разложение многочлена имеет вид: $(x-3y)(x+y)$. Получаем уравнение $(x-3y)(x+y)=-3$.

Так как x и y по условию целые числа, то и числа $x-3y$ и $x+y$ целые и являются делителями числа -3. Возможны четыре случая:

а) $\begin{cases} x-3y=1, \\ x+y=-3. \end{cases}$ Решение этой системы линейных уравнений $(-2; 1)$ является целочисленным;

б) $\begin{cases} x-3y=-1, \\ x+y=3. \end{cases}$ Решение такой системы $(2; 1)$ также является целочисленным;

в) $\begin{cases} x-3y=3, \\ x+y=-1. \end{cases}$ Решение системы $(0; -1)$ целочисленное;

г) $\begin{cases} x-3y=-3, \\ x+y=1. \end{cases}$ Решение системы $(0; 1)$ также целочисленное.

Таким образом, данное целое уравнение имеет четыре целочисленных решения: $(-2; -1)$, $(2; 1)$, $(0; -1)$, $(0; 1)$.

Пример 9

Найдем целочисленные решения уравнения $xy+2x-y=5$.

Данное целое уравнение также имеет вторую степень. Для его решения используем тот же прием, что и в предыдущем примере, — разложение левой части на множители. Для этого используем группировку членов. Получаем: $(xy+2x)-y=5$, или $x(y+2)-y-2=$ $=5-2$, или $x(y+2)-(y+2)=3$, или $(x-1)(y+2)=3$. Очевидно, что числа $x-1$ и $y+2$ целые и являются делителями числа 3. Возникают четыре ситуации:

а) $\begin{cases} x-1=1, \\ y+2=3. \end{cases}$ Решение этой системы $(2; 1)$;

б) $\begin{cases} x-1=3, \\ y+2=1. \end{cases}$ Решение этой системы $(4; -1)$;

в) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y+2=-3. \end{cases}$ Решение этой системы $(0; -5)$;

г) $\begin{cases} x-1=-3, \\ y+2=-1. \end{cases}$ Решение этой системы $(-2; -3)$.

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения: (2; 1), (4; –1), (0; –5), (–2; –3).

Пример 10

Найдем целочисленные решения уравнения $(2x-y)^2+$ $+27(3x-y)^2=25$.

Для решения этой задачи удобно сделать оценки. Так как числа $2x-y$ и $3x-y$ целые и могут принимать значения 0; ±1; ±2; ..., то их квадраты принимают значения 0; 1; 4; ... . Простейшие оценки показывают, что возможен единственный вариант: $(2x-y)^2=25$ и $(3x-y)^2=0$. Это приводит к двум системам линейных уравнений: $\begin{cases}2x-y=5,\\3x-y=0\end{cases}$ (решение $x=-5$, $y=-15$) и $\begin{cases}2x-y=-5,\\3x-y=0\end{cases}$ (решение $x=5$, $y=15$).

Таким образом, данное уравнение имеет два целочисленных решения: (–5; –15) и (5; 15).

Из рассмотренных примеров видно, что для решения задач с одинаковой формулировкой использовались различные приемы:

1) разложение одной из частей уравнения на множители;
2) рассмотрение делимости с остатком одной из переменных;
3) оценки определенных комбинаций переменных.

2. График уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения $p(x;y)=0$ с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых $(x;y)$ являются решениями этого уравнения.

Пример 11

а) Графиком уравнения $ax+by=c$ (где $a\neq 0$ или $b\neq 0$) является прямая.

б) Графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$ (где $a\neq 0$) является парабола.

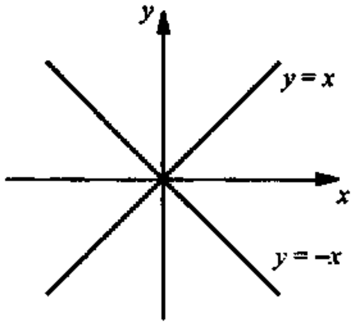
в) Графиком уравнения $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$) является гипербола.

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 12

Построим график уравнения $x^2-y^2=0$.

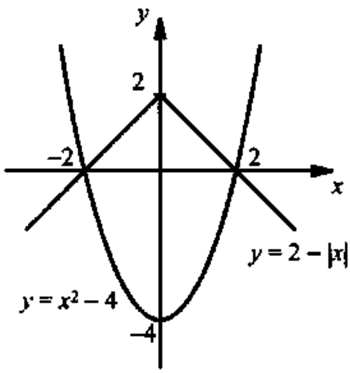
Разложим левую часть уравнения на множители: $(x-y)(x+y)=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем: $x - y = 0$ (откуда $y = x$) или $x + y = 0$ (тогда $y = -x$). Таким образом, графиком данного уравнения являются две прямые: $y = x$ и $y = -x$.



Пример 13

Построим график уравнения $(y+|x|-2)(y+4-x^2)=0$.

Используем тот же подход, что и в предыдущей задаче. Опять произведение множителей равно нулю. Получаем: $y + |x| - 2 = 0$ (откуда $y = 2 - |x|$) или $y + 4 - x^2 = 0$ (тогда $y = x^2 - 4$).

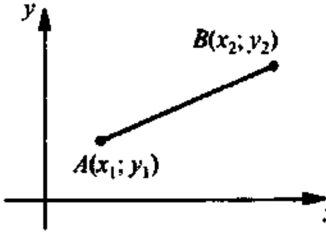


Итак, графиком данного уравнения являются модульная зависимость $y = 2 - |x|$ и парабола $y = x^2 - 4$. График уравнения симметричен относительно оси ординат.

3. Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости

График уравнения $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

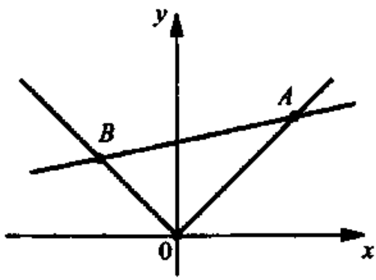
Теорема 1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Доказательство теоремы приводить не будем: оно изложено в учебнике.



Пример 14

Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}$ и расстояние между этими точками.

Построим график данных функций и обозначим точки пересечения этих графиков буквами A и B. Для нахождения координат таких точек надо решить систему уравнений $\begin{cases} y = |x|, \\ y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}. \end{cases}$



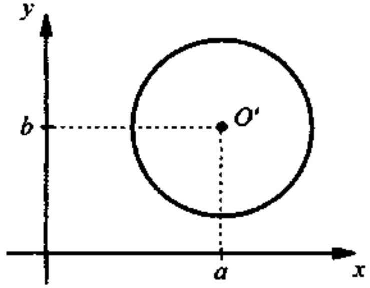
Сначала найдем координаты точки A. Как видно из рисунка, для этой точки координата $x > 0$. Поэтому получаем систему уравнений: $\begin{cases} y = x, \\ y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе. Имеем линейное уравнение: $x = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}$ или $5x = x + 12$, откуда $x = 3$ (тогда $y = 3$). Итак, нашли координаты точки $A(3; 3)$.

Теперь определим координаты точки B. Для нее координата $x < 0$. Поэтому получаем систему уравнений: $\begin{cases} y = -x, \\ y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{12}{5}. \end{cases}$ Вновь подставим первое уравнение во второе. Имеем линейное уравнение:

$-x = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$ или $-5x = x + 12$, откуда $x = -2$ (тогда $y = 2$). Получили координаты точки $B(-2; 2)$.

Найдем расстояние между точками A и B: $AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

Теорема 2. Графиком уравнения $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ является окружность с центром в точке $O'(a; b)$ и радиусом r.



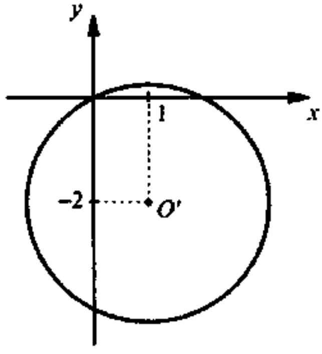
Доказательство этой теоремы также не приводим.

В частности, графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является окружность с центром в начале координат и радиусом r.

Пример 15

Построим график уравнения $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$.

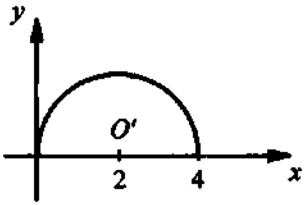
Так как в уравнение переменные x и y входят во второй степени (и ниже), то это уравнение окружности. Выделим в уравнении полные квадраты по переменным x и y. Для этого запишем уравнение в виде $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 5$ или $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$. Видно, что это уравнение окружности с центром в точке $O'(1; -2)$ и радиуса $r = \sqrt{5} \approx 2,2$. Теперь легко построить и сам график.



Пример 16

Построим график уравнения $y=\sqrt{4x-x^2}$.

Прежде всего отметим, что $y \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $y^2 = 4x - x^2$ или $y^2 + x^2 - 4x = 0$. Выделим квадрат разности по переменной x: $y^2 + (x^2 - 4x + 4) = 4$ или $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$. Получили уравнение окружности с центром в точке $O'(2; 0)$ и радиуса $r = 2$. Учитывая ограничение $y \geq 0$, имеем верхнюю полуокружность. Теперь можно строить график.



Заметим, что графики уравнений с двумя переменными могут иметь самый разнообразный и даже необычный вид.

III. Контрольные вопросы

1. Определение уравнения с двумя переменными.
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
3. Какие уравнения называют равносильными?
4. Как определить степень целого уравнения с двумя переменными?
5. Понятие о диафантовых уравнениях.
6. Формула для нахождения расстояния между точками A и B на координатной плоскости.
7. Уравнение окружности с центром в точке $O'(a; b)$ и радиуса r.

IV. Задание на уроках

§ 5, № 1; 3 (а, б); 4 (г); 5 (а, б); 8 (г); 11 (б); 13 (а); 15 (а, б); 30 (а, в); 31 (а); 32 (б).

V. Задание на дом

§ 5, № 2; 3 (в, г); 4 (а); 5 (в, г); 8 (а); 11 (г); 13 (в); 15 (в, г); 30 (б, г); 31 (б); 32 (а).

VI. Творческие задания

1. Найдите целочисленные решения уравнения:

а) $x^2 + 7xy + 6y^2 = 5$;

б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 2$;

в) $xy + x + 2y = 1$;

г) $xy+2x-3y=7$;

д) $(2x+y)^2+18(x+y)^2=16$;

е) $(2x+y)^2+28(3x+y)^2=25$;

ж) $3(x-1)^2+4(y+2)^2=7$;

з) $2(x-3)^2+3(y-2)^2=5$.

Ответы: а) (–7; 4), (7; –4), (13; –4), (–13; 4); б) (0; –1), (0; 1), (3; 1), (–3; –1); в) (–1; 2), (–3; –4), (1; 0), (–5; –2); г) (4; –1), (2; –3); д) (4; –4), (–4; 4); е) (5; –15), (–5; 15); ж) (2; –1), (2; –3), (0; –1), (0; –3); з) (4; 3), (4; 1), (2; 3), (2; 1).

2. Постройте график уравнения:

а) $(x^2+y^2-1)(x-y)=0$;

б) $(x^2+y^2-4)(x+y)=0$;

в) $\dfrac{x^2+y^2-25}{x-4}=0$;

г) $\dfrac{25-x^2-y^2}{y+3}=0$;

д) $\dfrac{xy+4}{x+y}=0$;

е) $\dfrac{9-xy}{x-y}=0$;

ж) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}=0$;

з) $\dfrac{9-x^2-y^2}{x^2-y^2}=0$;

и) $\dfrac{2y-x}{(x-2)^2+(y-1)^2}=0$;

к) $\dfrac{y-x^2}{(x+2)^2+(y-4)^2}=0$.

3. Постройте график уравнения:

а) $x^2+4x=6y-y^2$;

б) $x^2+y^2+1=2x+4y$;

в) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

г) $y=\sqrt{-6x-x^2}$;

д) $y+1=\sqrt{4x-x^2}$;

е) $y=\sqrt{6x-x^2}+2$;

ж) $|y-1|=\sqrt{4x-x^2}$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 19–20. Основные понятия (продолжение)

Цель: продолжить изучение основных понятий темы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение решения уравнения с двумя переменными.

2. Постройте график уравнения:

а) $(xy-1)(x+1)=0$;

б) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$;

в) $y-1=\sqrt{4x-x^2}$.

Вариант 2

1. Определение уравнения с двумя переменными.

2. Постройте график уравнения:

а) $(xy+1)(y-1)=0$;

б) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$;

в) $y+1=\sqrt{6x-x^2}$.

III. Изучение нового материала

4. Системы уравнений с двумя переменными

Уравнения $p(x;y)=0$ и $q(x;y)=0$ образуют **систему уравнений**, если возникает задача нахождения пары чисел $(x;y)$, которые удовлетворяют каждому уравнению. При этом такая пара чисел $(x;y)$

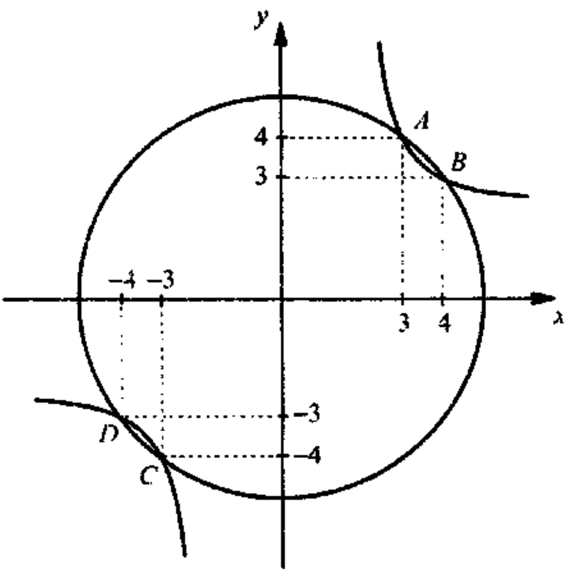
является **решением системы уравнений**. Уравнения, образующие систему, объединяются фигурной скобкой $\begin{cases} p(x;\ y) = 0, \\ q(x;\ y) = 0. \end{cases}$ Решить систему уравнений – это значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Одним из эффективных и наглядных способов решения и исследования уравнений и систем уравнений является **графический способ**.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики первого $x^2 + y^2 = 25$ (окружность) и второго $xy = 12$ (гипербола) уравнений.

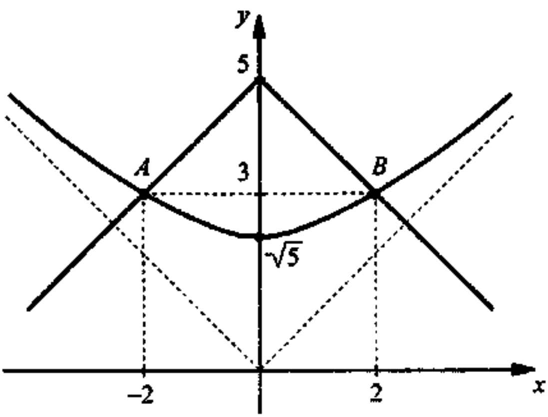


Видно, что графики уравнений пересекаются в четырех точках: $A(3;\ 4)$, $B(4;\ 3)$, $C(-3;\ -4)$ и $D(-4;\ -3)$, координаты которых являются решениями данной системы. Так как при графическом способе решения могут быть найдены с некоторой точностью, то их необходимо проверить подстановкой. Проверка показывает, что система действительно имеет четыре решения: $(3;\ 4)$, $(4;\ 3)$, $(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{x^2+5}, \\ y+|x|=5. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики первого и второго уравнений. При $x = 0$ для первого уравнения находим $y=\sqrt{5}$. При больших значениях $|x|$ имеем: $y=\sqrt{x^2+5}\approx\sqrt{x^2}=|x|$. После этого график первого уравнения легко построить.

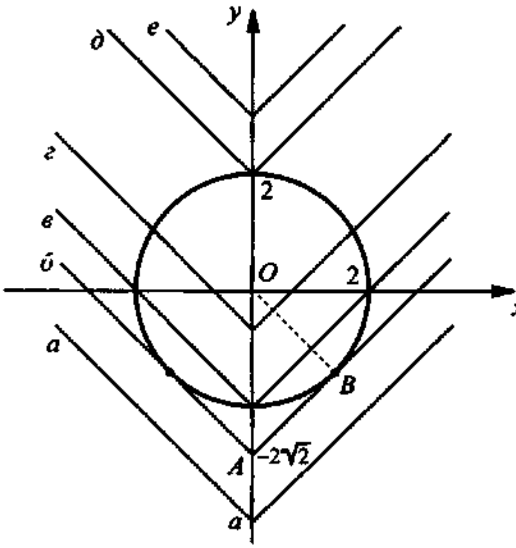


Второе уравнение запишем в виде $y = 5 - |x|$. Построение его графика также не вызывает труда. Графики пересекаются в двух точках: $A(-2; 3)$ и $B(2; 3)$. Проверкой убеждаемся, что система уравнений имеет два решения: $(-2; 3)$ и $(2; 3)$.

Пример 3

При всех значениях параметра a определим число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=|x|+a. \end{cases}$

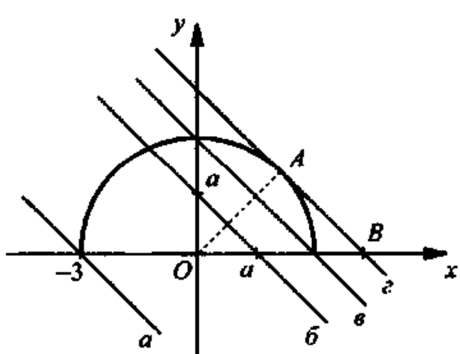
Построим график первого уравнения $x^2 + y^2 = 2^2$ (окружность) и второго уравнения $y = |x| + a$ для различных значений параметра a. Этот график пересекает ось ординат в точке $y = a$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу $OA=2\sqrt{2}$. Тогда сразу получаем ответ задачи: при $a\in(-\infty; -2\sqrt{2})\cup(2; +\infty)$ система не имеет решений (графики *а, е*), при $a\in\{-2\sqrt{2}\}\cup(-2; 2)$ – имеет два решения (графики *б, г*), при $a = -2$ – три решения (график *в*) и при $a = 2$ – одно решение (график *д*).



Пример 4

При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2}, \\ y = a - x \end{cases}$ имеет единственное решение?

Построим график первого уравнения $y = \sqrt{9 - x^2}$ (верхняя полуокружность, так как $y \geq 0$). Также в этой системе координат строим график второго уравнения $y = a - x$ для различных значений параметра a (прямая). Эта прямая пересекает оси координат в точках $x = a$ и $y = a$.



Очевидно, что система уравнений имеет единственное решение, если прямая $y = a - x$ находится между положениями *а* и *в*, а также в случае касания *г*. Для этого случая из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу $OB = 3\sqrt{2}$ (соответственно, $a = 3\sqrt{2}$). Следовательно, при $a \in \{-3; 3) \cup \{3\sqrt{2}\}$ система уравнений имеет единственное решение.

5. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

Часто приходится изображать на координатной плоскости **множество решений неравенства** с двумя переменными. Напомним, что **решением неравенства** $p(x; y) \vee 0$ с двумя переменными x и y называют пару значений $(x; y)$ этих переменных, которая обращает данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 5

Рассмотрим неравенство $3x^2 - \dfrac{1}{y} \le 8$. Пара значений переменных $(-1; 1)$ обращает это неравенство в верное числовое неравенство: $3 \cdot (-1)^2 - \dfrac{1}{1} \le 8$ или $2 \le 8$ – и является решением неравенства. Пара значений $(2; 1)$ приводит к неверному числовому неравенству: $3 \cdot 2^2 - \dfrac{1}{1} \le 8$ или $11 \le 8$ – и не является решением данного неравенства.

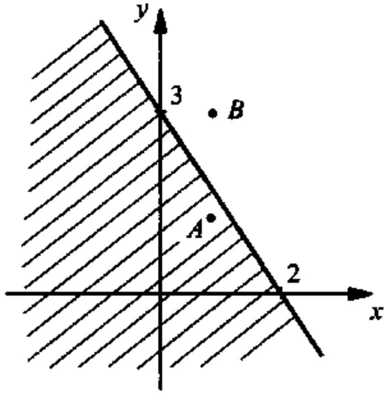
На примерах рассмотрим, как изображается множество решений неравенства с двумя переменными на координатной плоскости.

Пример 6

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.

Сначала построим прямую $2y + 3x = 6$ или $y = 3 - \dfrac{3}{2}x$. Она разбивает множество всех точек координатной плоскости на точки, расположенные выше ее, и точки, расположенные ниже ее. Возьмем из каждой области по контрольной точке, например $A(1; 1)$ и $B(1; 3)$. Координаты точки A удовлетворяют данному неравенству: $2y + 3x \le 6$, т. е. $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \le 6$. Координаты точки B не удовлетворяют данному неравенству: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \le 6$.

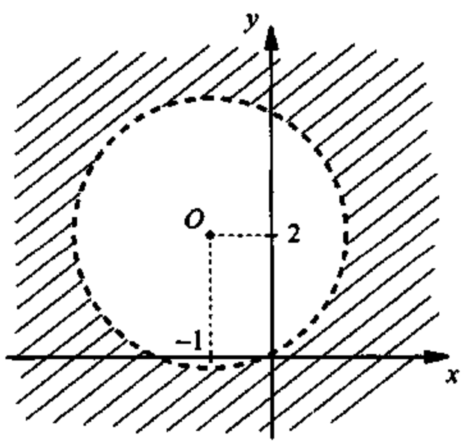
Так как данное неравенство может изменить знак на прямой $2y + 3x = 6$, то неравенству удовлетворяет множество точек той области, где расположена точка A. Заштрихуем эту область. Таким образом, изобразили множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.



Пример 7

Изобразим множество решений неравенства $x^2+2x+y^2-4y+1>0$ на координатной плоскости.

Построим сначала график уравнения $x^2+2x+y^2-4y+1=0$. Выделим в этом уравнении уравнение окружности: $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=4$ или $(x+1)^2+(y-2)^2=2^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $O(-1;\ 2)$ и радиуса $R = 2$. Построим эту окружность. Так как данное неравенство строгое и точки, лежащие на самой окружности, неравенству не удовлетворяют, то строим окружность пунктирной линией.

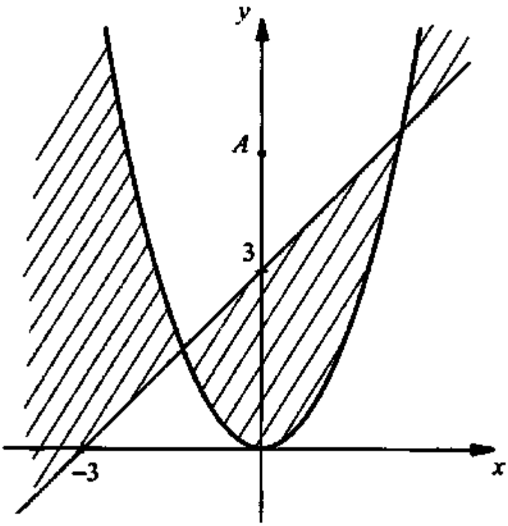


Легко проверить, что координаты центра O окружности данному неравенству не удовлетворяют. Выражение x^2+2x+y^2-4y+1 меняет свой знак на построенной окружности. Тогда неравенству удовлетворяют точки, расположенные вне окружности. Эти точки заштрихованы.

Пример 8

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $(y-x^2)(y-x-3)\le 0$.

Сначала построим график уравнения $(y-x^2)(y-x-3)=0$. Им являются парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 3$. Построим эти линии и отметим, что изменение знака выражения $(y-x^2)(y-x-3)$ происходит только на этих линиях. Для точки $A(0; 5)$ определим знак этого выражения: $(5 - 0^2)(5 - 0 - 3) > 0$ (т. е. данное неравенство не выполняется). Теперь легко отметить множество точек, для которых данное неравенство выполнено (эти области заштрихованы).



Как видно из рассмотренных примеров, для построения множества решений неравенства с двумя переменными используется **метод интервалов на координатной плоскости**.

В ряде случаев на координатной плоскости приходится изображать множество решений системы неравенств с двумя переменными. Напомним, что пара значений неизвестных, которая одновременно является решением и первого, и второго неравенств, называется решением системы двух неравенств с двумя переменными.

Пример 9

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными $\begin{cases} y \geq x^2 + 2, \\ x + y < 6. \end{cases}$

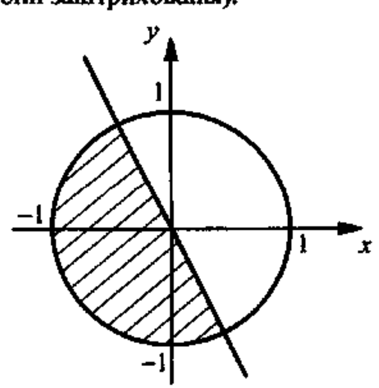
Пара значений переменных (1; 4) является решением системы неравенств, так как является решением каждого неравенства: $\begin{cases} 4 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 4 < 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4 \geq 3, \\ 5 < 6. \end{cases}$ Пара значений переменных (1; 1) не является решением системы неравенств, так как не является решением первого неравенства: $\begin{cases} 1 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 1 < 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \geq 3, \\ 2 < 6. \end{cases}$

Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является пересечение множеств решений всех неравенств, входящих в систему. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, являющихся общей частью множеств, представляющих собой решения каждого неравенства системы.

Пример 10

Изобразим на координатной плоскости множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2x + y \leq 0. \end{cases}$

Первое неравенство системы задает на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиуса, равного 1. Второе неравенство задает полуплоскость, расположенную ниже прямой $2x + y = 0$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки полукруга (они заштрихованы).

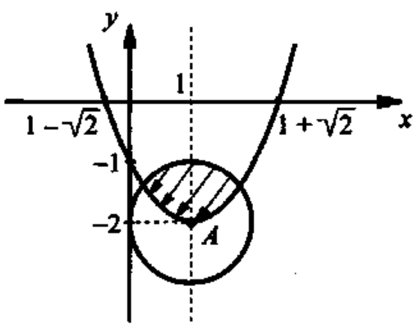


Пример 11

На плоскости xOy изобразим точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} y > x^2 - 2x - 1, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 \le 1. \end{cases}$

Изобразим сначала точки, удовлетворяющие первому неравенству. Сначала построим график границы – график функции $y = x^2 - 2x - 1$. Эта парабола пересекает ось Oy в точке $y = -1$, ось Ox – в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Вершина параболы находится в точке (1; –2), ветви параболы направлены вверх. Эта кривая разбила координатную плоскость на две части: часть, заключенную между ветвями параболы, и часть, находящуюся за ветвями параболы. Взяв любую точку (например, (1; –1)) из первой части плоскости, видим, что она удовлетворяет неравенству $y \ge x^2 - 2x - 1$. Поэтому все точки этой части также удовлетворяют неравенству (за исключением границы, так как неравенство строгое).

Аналогично, построив границу $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, видим, что неравенству $(x-1)^2 + (y+2)^2 \le 1$ удовлетворяют внутренние и граничные точки окружности.



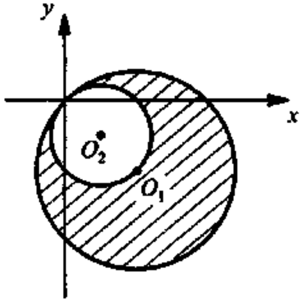
Штриховкой показаны те точки, которые удовлетворяют системе неравенству. Причем стрелки показывают, что данная граница (часть параболы) не входит в множество решений системы неравенств.

Пример 12

Изобразим множество точек, которые являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 8y \le 0, \\ x^2 - 4x + y^2 + 4y \ge 0, \end{cases}$ и вычислим площадь этой фигуры.

Запишем систему неравенств в виде

$$\begin{cases}(x^2-8x+16)+(y^2+8y+16)\le 32,\\ (x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)\ge 8\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x-4)^2+(y+4)^2\le(4\sqrt{2})^2,\\ (x-2)^2+(y+2)^2\ge(2\sqrt{2})^2.\end{cases}$$



Графиком первого неравенства является круг с центром в точке $O_1(4; -4)$ и радиуса $R_1=4\sqrt{2}$. Графиком второго неравенства являются точки, расположенные за окружностью с центром в точке $O_2(2; -2)$ и радиуса $R_2=2\sqrt{2}$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки, расположенные между двумя касающимися в начале системы координат окружностями (эти точки заштрихованы).

Найдем площадь этой фигуры. Она равна разности площадей окружностей: $S=\pi R_1^2-\pi R_2^2=\pi(4\sqrt{2})^2-\pi(2\sqrt{2})^2=32\pi-8\pi=24\pi$. Таким образом, площадь заштрихованной фигуры равно в 3 раза больше площади малого круга.

IV. Задание на уроках

§ 5, № 18 (а, б); 19 (в, г); 20 (а, в); 21 (а, б); 34 (г); 35 (в); 39 (а).

V. Задание на дом

§ 5, № 18 (в, г); 19 (а, б); 20 (б, г); 21 (в, г); 34 (б); 35 (г); 39 (б).

VI. Творческие задания

1. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений имеет ровно два решения:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ |x|+y=a;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=2a,\\ xy=a-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответы: а) $(-1; 1)\cup\{\sqrt{2}\}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

2. Найдите значения параметра *a*, при которых система уравнений имеет ровно три решения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ y=|x-a|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=a. \end{cases}$

Ответы: а) $-1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2};\ 0$; б) $\sqrt{2}$.

3. Для каждого значения параметра *a* определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$

Ответы: а) при $a\in(-\infty;1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$ нет решений, при $a\in\{1;\sqrt{2}\}$ четыре решения, при $a\in(1;\sqrt{2})$ восемь решений; б) при $|a|\in\left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1;\infty)$ нет решений, при $|a|\in\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right\}$ четыре решения, при $|a|\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ восемь решений.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $(x-1)(y+2)\le 0$;
б) $(2x+3)(3y-2)\ge 0$;
в) $(y-x^2)(y-2)>0$;
г) $(y+x^2)(y+3)<0$;
д) $(x^2-4)(y+1)\le 0$;
е) $(y^2-1)(x+2)\ge 0$;
ж) $(x^2+y^2-4)(x+1)>0$;
з) $(x^2+y^2-9)(y-2)<0$;
и) $\dfrac{(x-1)^2+(y+2)^2-4}{x-1}\le 0$;
к) $\dfrac{(x+2)^2+(y-4)^2-9}{y-4}\ge 0$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 21–22. Методы решения систем уравнений

Цель: рассмотреть способы решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ y=x^2-2. \end{cases}$

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $|y-x-1|<2$;
б) $x^2+(y+1)^2\geq 4$.

Вариант 2

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y=2x-2, \\ y=x^2+1. \end{cases}$

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $|y+x+2|>1$;
б) $(x-1)^2+y^2\leq 4$.

III. Изучение нового материала

В 7 классе было рассмотрено решение систем линейных уравнений (т. е. уравнений первой степени) с двумя переменными. Теперь необходимо перейти к изучению систем нелинейных уравнений (т. е. уравнений степени два и выше). При их решении в основном используются три метода.

Основные методы решения систем уравнений

1. Метод подстановки

Этот метод уже применялся при решении систем линейных уравнений. Напомним **алгоритм** использования такого метода:

1) выразить из более простого уравнения одну переменную через другую;

2) подставить это выражение в другое уравнение и получить уравнение с одной неизвестной;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующие значения второй неизвестной.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases}3y^2-2x^2+xy+5x+y=8,\\ 2x-y=3.\end{cases}$

Второе уравнение системы является линейным (первой степени) и, соответственно, более простым. Выразим из него переменную y через переменную x: $y = 2x - 3$. Подставим это выражение в первое уравнение и получим уравнение с переменной x: $3(2x-3)^2-2x^2+x(2x-3)+5x+(2x-3)=8$ или (после преобразований) $3x^2 - 8x + 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2=\frac{2}{3}$. Используя формулу $y = 2x - 3$, найдем соответствующие значения переменной y: $y_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ и $y_2=2\cdot\frac{2}{3}-3=-\frac{5}{3}$. Итак, система имеет два решения: (2; 1) и $\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Во многих случаях оба уравнения системы являются нелинейными. Иногда способ подстановки пригоден и для таких систем.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases}x^2+5xy-2y^2=-2,\\ xy=3.\end{cases}$

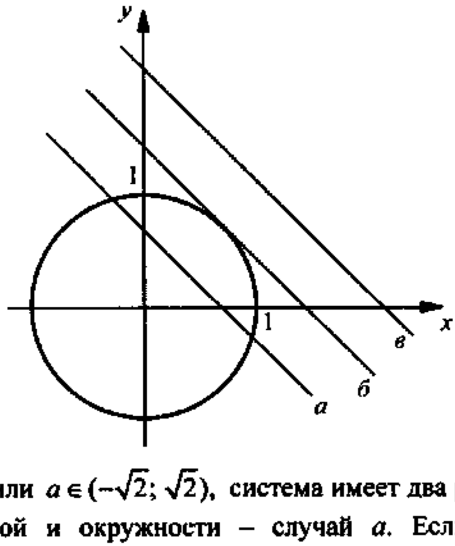
Очевидно, что $x \neq 0$. Из второго уравнения выразим переменную y через x: $y=\frac{3}{x}$ – и подставим в первое. Получаем уравнение: $x^2+5\cdot3-2\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2=-2$ (после преобразований) $x^4+17x^2-18=0$. Корни этого биквадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. По формуле $y=\frac{3}{x}$ найдем соответствующие значения y: $y_1=\frac{3}{1}=3$ и $y_2=\frac{3}{-1}=-3$. Итак, система уравнений имеет два решения: (1; 3) и (–1; –3).

Способ подстановки полезен и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 3

При всех значениях параметра a определим число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a. \end{cases}$

Из второго уравнения выразим переменную y через x: $y = a - x$. Подставим это выражение в первое уравнение и получим: $x^2+(a-x)^2=1$ или $2x^2-2ax+a^2-1=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4(2 - a^2)$. Число решений уравнения (а следовательно, и системы уравнений) определяется знаком дискриминанта.



Если $D > 0$ или $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, система имеет два решения (пересечение прямой и окружности – случай *а*. Если $D = 0$ или $a \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$, система имеет одно решение (касание прямой и окружности – случай *б*. Если $D < 0$ или $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$, система не имеет решений (прямая не пересекает окружность – случай *в*.

2. Метод алгебраического сложения

Этот метод также использовался в 7 классе при решении систем линейных уравнений. Его можно использовать для того, чтобы или получить уравнение только с одной переменной, или найти более простую (желательно линейную) связь между переменными.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3(x+1)^2-2(y+3)^3=10, \\ 5(x+1)^2+2(y+3)^3=22. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим уравнение для x: $8(x+1)^2=32$ или $(x+1)^2=4$, откуда $x+1=\pm2$ и $x_1=1$, $x_2=-3$. Подставим выражение $(x+1)^2=4$, например, в первое уравнение. Имеем: $12-2(y+3)^3=10$, откуда $(y+3)^3=1$ или $y+3=1$ и $y=-2$. Итак, система уравнений имеет два решения: $(1; -2)$ и $(-3; -2)$.

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2xy+3x+2y=12, \\ 3xy+5x-y=15. \end{cases}$

В уравнениях имеется только один член второй степени – член, пропорциональный xy. Поэтому от него надо избавиться. Для этого первое уравнение умножим на 3, второе – на (-2). Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} 6xy+9x+6y=36, \\ -6xy-10x+2y=-30. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $(6xy+9x+6y)+(-6xy-10x+2y)=36-30$ или $8y-x=6$. Тем самым мы нашли **линейную связь между переменными.** Из равенства $8y-x=6$ выразим $x=8y-6$. Подставим это выражение, например, в первое уравнение исходной системы. Получаем уравнение с одной переменной: $2(8y+6)y+$ $+3(8y-6)+2y=12$ или $8y^2+7y-15=0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1=1$ и $y_2=-\dfrac{15}{8}$. Используя формулу $x=8y-6$, для каждого значения y найдем соответствующее значение x: $x_1=8\cdot1-6=2$ и $x_2=8\cdot\left(-\dfrac{15}{8}\right)-6=-21$. Итак, система имеет два решения: $(2; 1)$ и $\left(-21; -\dfrac{15}{8}\right)$.

3. Метод введения новых переменных

Для уравнений с одной переменной такой метод был использован в 8 классе. Он применяется, чтобы получить более простое уравнение. Метод введения новых переменных часто используется и для решения систем уравнений. Его можно применять как для одного уравнения системы, так и для всех уравнений. С помощью такого метода можно или найти связь между переменными, или получить более простую систему уравнений.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases} 5\dfrac{2x-y}{x+y}+4\dfrac{x+y}{2x-y}=9, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$

Характерна структура первого уравнения: в него входит выражение $\dfrac{2x-y}{x+y}$ и обратное выражение $\dfrac{x+y}{2x-y}$. Поэтому введем новую переменную $t=\dfrac{2x-y}{x+y}$ и запишем первое уравнение в виде $5t+\dfrac{4}{t}=9$ или $5t^2-9t+4=0$. Его корни $t_1=1$ и $t_2=\dfrac{4}{5}$. Вернемся к старым переменным. Получаем два случая: $\dfrac{2x-y}{x+y}=1$ (тогда $2x-y=x+y$ и $x=2y$) и $\dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{4}{5}$ (тогда $10x-5y=4x+4y$ и $x=\dfrac{3}{2}y$). Таким образом, с помощью новой переменной t нашли линейную связь между неизвестными x и y.

Далее используем второе уравнение исходной системы. Получаем две более простые системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=2y, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$ Подставим первое уравнении во второе. Имеем: $3\cdot(2y)^2-15y^2=-33$ или $-3y^2=-33$, откуда $y^2=11$ и $y=\pm\sqrt{11}$. Находим соответствующие значения: $x=2(\pm\sqrt{11})=\pm2\sqrt{11}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе. Имеем: $3\cdot\left(\dfrac{3}{2}y\right)^2-15y^2=-33$ или $-\dfrac{33}{4}y^2=-33$, откуда $y^2=4$ и $y=\pm2$. Находим соответствующие значения $x=\dfrac{3}{2}\cdot(\pm2)=\pm3$.

Таким образом, данная система уравнений имеет четыре решения: $(2\sqrt{11};\ \sqrt{11})$, $(-2\sqrt{11};\ -\sqrt{11})$, $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$.

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} 5\dfrac{3x-2}{2y+1}+4\dfrac{2x+1}{3y-2}=14, \\ 15\dfrac{3x-2}{2y+1}+8\dfrac{2x+1}{3y-2}=35. \end{cases}$

В эту систему уравнений входят только дроби $\dfrac{3x-2}{2y+1}$ и $\dfrac{2x+1}{3y-2}$. Поэтому введем две новые переменные: $a=\dfrac{3x-2}{2y+1}$ и $b=\dfrac{2x+1}{3y-2}$. Тогда данная система уравнений становится *более простой* (*линейной*): $\begin{cases} 5a+4b=14, \\ 15a+8b=35. \end{cases}$ Решим эту систему линейных уравнений, например, методом алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на (–2) и получим систему $\begin{cases} -10a-8b=-28, \\ 15a+8b=35. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: $5a=7$, откуда $a=\dfrac{7}{5}$. Подставим величину $a=\dfrac{7}{5}$, например, в первое уравнение исходной системы: $5\cdot\dfrac{7}{5}+4b=14$ или $4b=7$, откуда $b=\dfrac{7}{4}$.

Вернемся к старым переменным и получим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2y+1}=\dfrac{7}{5}, \\ \dfrac{2x+1}{3y-2}=\dfrac{7}{4}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 15x-10=14y+7, \\ 8x+4=21y-14, \end{cases}$ или $\begin{cases} 15x-14y=17, \\ 8x-21y=-18. \end{cases}$ Эта система является линейной. Опять используем метод алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на 3, второе уравнение – на (–2). Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 45x-42y=51, \\ -16x+42y=36. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: $29x=87$, откуда $x=3$. Подставим значение $x=3$ в первое уравнение: $15\cdot 3-14y=17$ или $-14y=-28$, тогда $y=2$.

Итак, данная система имеет единственное решение (3; 2).

IV. Контрольные вопросы

1. Как используется метод подстановки для решения систем уравнений?

2. Объясните метод алгебраического сложения.

3. Метод введения новых переменных.

V. Задание на уроках

§ 6, № 1 (б); 3 (а); 5 (б); 7 (а, г); 8 (б); 9 (г); 10 (б); 13 (а); 14 (в); 15 (а); 16 (б); 20 (а); 21 (б); 22 (а); 23 (б); 24 (а).

VI. Задание на дом

§ 6, № 1 (г); 3 (б); 5 (г); 7 (б, в); 8 (г); 9 (б); 10 (г); 13 (б); 14 (г); 15 (б); 16 (г); 20 (б); 21 (в); 22 (б); 23 (а); 24 (б).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 23–24. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций

Цель: использовать системы уравнений для решения текстовых задач.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x^2+3xy-5y^2+7x+4y=3. \end{cases}$

Ответы: а) (1; 2); б) (1; 2), (32; –13,5); в) (1; 2), $\left(32\frac{1}{3}; -13\frac{2}{3}\right)$; г) (1; 2), (23; –9).

2. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} 3(x-2)^2+7(y+3)^3=5, \\ 2(x-2)^2-7(y+3)^3=15. \end{cases}$

Ответы: а) (0; –4), (4; –4); б) (4; –4); в) (2; –4); г) (4; –6).

Вариант 2

1. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=3, \\ 3x^2+4xy+7y^2+x+8y=5. \end{cases}$

Ответы: а) (2; –1); б) (2; –1), $\left(\frac{41}{23}; -\frac{13}{23}\right)$; в) (2; –1), (34; –65); г) (2; –1), (18; –33).

2. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} 7(x+2)^3+2(y+1)^2=1, \\ 3(x+2)^3-2(y+1)^2=-11. \end{cases}$

Ответы: а) (–3; 1); б) (–3; 2); в) (–3; –3); г) (–3; 1), (–3; –3).

III. Изучение нового материала

Системы уравнений с двумя переменными часто используются при решении текстовых задач. Для этого применяют стандартную схему:

Первый этап – составление математической модели;

Второй этап – работа с составленной моделью;

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

На примерах рассмотрим использование этой схемы.

Пример 1

Произведение двух чисел равно 168, а сумма их квадратов равна 340. Найдем эти числа.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть одно из чисел равно x, другое – y. Тогда их произведение xy. По условию задачи оно равно 168. Получаем первое уравнение: $xy = 168$. Квадрат одного числа равен x^2, квадрат другого числа – y^2. Сумма квадратов чисел составляет $x^2 + y^2$. По условию такая сумма равна 340. Имеем второе уравнение: $x^2 + y^2 = 340$. Итак, для нахождения чисел x и y получили систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} xy=168, \\ x^2+y^2=340. \end{cases}$ Таким образом, математическая модель задачи составлена.

Второй этап – работа с составленной моделью.

Каждое уравнение полученной системы имеет вторую степень. Поэтому система уравнений нелинейна. Для ее решения можно предложить два способа.

<u>1-й способ</u>. Используем способ подстановки. Из первого уравне-

ния выразим $y = \dfrac{168}{x}$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $x^2 + \left(\dfrac{168}{x}\right)^2 = 340$ или $x^4 - 340x^2 + 28\,224 = 0$. Корни этого биквадратного уравнения $x_{1,2} = \pm 12$ и $x_{3,4} = \pm 14$. По формуле $y = \dfrac{168}{x}$ найдем соответствующие значения y: $y_{1,2} = \pm 14$ и $y_{3,4} = \pm 12$. Итак, задача имеет четыре решения: (12; 14), (–12; –14), (14; 12), (–14; –12).

2-й способ. Используем способ сложения. Умножим первое уравнение на 2 и запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} x^2 + y^2 = 340, \\ 2xy = 336. \end{cases}$

Сложим и вычтем уравнения системы. Имеем: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 676, \\ x^2 + y^2 - 2xy = 4, \end{cases}$

или $\begin{cases} (x+y)^2 = 676, \\ (x-y)^2 = 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y = \pm 26, \\ x-y = \pm 2. \end{cases}$

Таким образом, данная система сводится к четырем системам линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+y = 26, \\ x-y = -2 \end{cases}$ – решение (12; 14);

б) $\begin{cases} x+y = -26, \\ x-y = 2 \end{cases}$ – решение (–12; –14);

в) $\begin{cases} x+y = 26, \\ x-y = 2 \end{cases}$ – решение (14; 12);

г) $\begin{cases} x+y = -26, \\ x-y = -2 \end{cases}$ – решение (–14; –12).

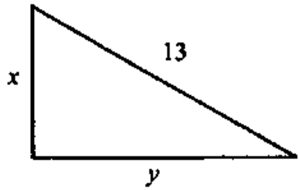
Третий этап – ответ на вопрос задачи.

По условию задачи не требуется конкретизировать, какое из чисел первое, а какое второе. Поэтому искомые числа 12 и 14, а также числа, противоположные им: –12 и –14.

Пример 2

Периметр прямоугольного треугольника равен 30 см, а его гипотенуза равна 13 см. Найдите стороны треугольника.

Первый этап – составление математической модели.



Пусть катеты треугольника равны x см и y см. Учтем, что периметр многоугольника – сумма длин всех его сторон. Получаем первое уравнение: $x + y + 13 = 30$ см. Для записи второго уравнения учтем теорему Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Имеем второе уравнение: $x^2 + y^2 = 13^2$. Итак, для нахождения катетов треугольника получили систему уравнений: $\begin{cases} x + y + 13 = 30, \\ x^2 + y^2 = 13^2. \end{cases}$

Второй этап – работа с составленной моделью.

Запишем полученную систему уравнений в виде $\begin{cases} x + y = 17, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

Первое уравнение системы линейное, второе уравнение имеет вторую степень. Поэтому решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 17 - x$ и подставим во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение: $x^2 + (17 - x)^2 = 169$ или $x^2 - 17x + 60 = 0$, корни которого $x_1 = 5$ и $x_2 = 12$. По формуле $y = 17 - x$ найдем соответствующие значения y: $y_1 = 17 - 5 = 12$ и $y_2 = 17 - 12 = 5$.

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Система уравнений имеет два решения: (5; 12) и (12; 5). Так как непонятно, какой из катетов первый, а какой второй, то запишем ответ: катеты треугольника равны 5 см и 12 см.

Пример 3

Катер проходит 80 км по течению реки и 40 км – против течения за 6 ч 30 мин. Тот же катер проходит 40 км по течению и 80 км – против течения за 7 ч. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x (км/ч) – собственная скорость катера, y (км/ч) – скорость течения реки. Тогда скорость катера по течению реки $(x + y)$ (км/ч), против течения реки – $(x - y)$ (км/ч).

80 км по течению реки катер проходит за время $\dfrac{80}{x+y}$ (ч), а 40 км

против течения – за время $\frac{40}{x-y}$ (ч). Так как в этом случае на весь путь было затрачено 6 ч 30 мин (т. е. $6\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$ ч), то получаем первое уравнение: $\frac{80}{x+y}+\frac{40}{x-y}=\frac{13}{2}$.

Рассмотрим вторую ситуацию. 40 км по течению реки катер проходит за время $\frac{40}{x+y}$ (ч), 80 км против течения – за время $\frac{80}{x-y}$ (ч). В этом случае на весь путь было затрачено время 7 ч. Поэтому получаем второе уравнение: $\frac{40}{x+y}+\frac{80}{x-y}=7$.

Для нахождения собственной скорости катера x и скорости течения реки y имеем систему уравнений: $\begin{cases}\frac{80}{x+y}+\frac{40}{x-y}=\frac{13}{2},\\ \frac{40}{x+y}+\frac{80}{x-y}=7.\end{cases}$

Второй этап – работа с составленной моделью.

Получили систему рациональных уравнений. Если в каждом уравнении избавиться от знаменателей, то увидим, что уравнения имеют вторую степень (т. е. нелинейны).

Учитывая структуру уравнений системы, решим ее способом введения новых переменных: $a=\frac{40}{x+y}$ и $b=\frac{40}{x-y}$. Тогда исходная система уравнений становится линейной: $\begin{cases}2a+b=\frac{13}{2},\\ a+2b=7.\end{cases}$ Решим эту систему, например, способом алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на (–2) и получим систему $\begin{cases}-4a-2b=-13,\\ a+2b=7.\end{cases}$ Сложим эти уравнения и получим: $-3a=-6$, откуда $a=2$. Подставим такую величину во второе уравнение: $2+2b=7$, откуда $b=\frac{5}{2}$.

Вернемся к старым переменным. Имеем систему уравнений

$\begin{cases} \dfrac{40}{x+2}=2, \\ \dfrac{40}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=16. \end{cases}$ Сложим и вычтем, соответственно, уравнения системы. Получаем: $2x = 36$ (откуда $x = 18$) и $2y = 4$ (откуда $y = 2$).

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Решив систему уравнений, получили: $x = 18$ и $y = 2$. Итак, собственная скорость катера 18 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч.

Как видно из примеров 1–3, при решении получающихся систем уравнений использовались рассмотренные ранее методы. При этом трудностей не возникало (второй этап схемы решения). Практика показывает, что затруднение у школьников обычно возникает при составлении математической модели задачи (первый этап).

Пример 4

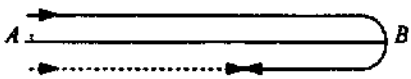
Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время – мотоциклист со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста в 20 км от пункта А. Прибыв в В, мотоциклист через 36 мин выехал обратно и встретился с велосипедистом спустя 3 ч 20 мин после выезда велосипедиста из А. Найти скорость велосипедиста.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x (км/ч) – скорость велосипедиста, t (ч) – время, через которое выехал из пункта А мотоциклист после велосипедиста. Опишем условия задачи. Раз мотоциклист выехал на t (ч) позже велосипедиста, то он и находился в пути на t (ч) меньше.

Первая встреча произошла в 20 км от А. Велосипедист проехал это расстояние за время $\dfrac{20}{x}$ (ч), мотоциклист – за время $\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$ (ч). Учтем, что мотоциклист находился в пути на t (ч) меньше. Получаем первое уравнение: $\dfrac{20}{x}-\dfrac{2}{5}=t$.

Опишем вторую встречу. Она произошла через 3 ч 20 мин $= 3\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$ (ч) после выезда велосипедиста из А. Он за это время проехал расстояние $x\cdot\dfrac{10}{3}=\dfrac{10}{3}\cdot x$ (км). Мотоциклист находился в пути $\dfrac{10}{3}-t-\dfrac{3}{5}=\dfrac{41}{15}-t$ (ч) (учтем, что 36 мин $=\dfrac{36}{60}=\dfrac{3}{5}$ ч). За это время он проехал $50\left(\frac{41}{15}-t\right)$ (км). Из рисунка видно, что сумма расстояний, пройденных велосипедистом и мотоциклистом до второй встречи, равна удвоенному расстоянию между пунктами А и В. Получаем второе уравнение: $\frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-t\right)=140$. Итак, получили систему уравнений: $\begin{cases}\frac{20}{x}-\frac{2}{5}=t,\\ \frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-t\right)=140.\end{cases}$



Заметим, что описание условий задачи (получение системы уравнений) может вызвать определенные трудности.

Второй этап – работа с составленной моделью.

Способ решения определяет условие задачи: надо найти скорость велосипедиста x. Поэтому подставим первое уравнение во второе и постепенно преобразуем полученное уравнение. Имеем: $\frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-\frac{20}{x}+\frac{2}{5}\right)=140$, или $\frac{10}{3}x+50\cdot\frac{47x-300}{15x}=140$, или $x^2+47x-300=42x$, или $x^2+5x-300=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=15$ и $x_2=-20$.

Третий этап – ответ на вопрос задачи.

Очевидно, что ответ $x=-20$ смысла не имеет, так как скорость велосипедиста не может быть отрицательной. Тогда скорость велосипедиста 15 км/ч. Для интереса найдем время $t=\frac{20}{15}-\frac{2}{5}=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{14}{15}$ ч $=56$ мин (т. е. мотоциклист выехал через 56 мин после велосипедиста).

IV. Задание на уроках

§ 7, № 1, 5, 12, 16, 18, 22, 29, 38, 44, 49, 54.

V. Задание на дом

§7, № 2, 8, 13, 17, 19, 23, 30, 39, 45, 50, 55.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 25–26. Основные типы систем уравнений

Цели: систематизировать основные типы систем уравнений; рассмотреть способы их решения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сумма двух чисел равна 30, а их произведение равно 216. Найдите эти числа.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а его периметр равен 48 см. Найдите катеты треугольника.

Вариант 2

1. Сумма двух чисел равна 40, а их произведение равно 364. Найдите эти числа.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а его периметр равен 60 см. Найдите катеты треугольника.

III. Изучение нового материала

Система уравнений, в которой **хотя бы одно из уравнений не является линейным**, называется **системой нелинейных уравнений**. Как вы видели, существуют способы решения любой системы линейных уравнений. Для систем нелинейных уравнений таких универсальных способов не существует, и многие системы до сих пор не решены.

Основной подход к решению систем нелинейных уравнений состоит в том, что с помощью тех или иных преобразований получают линейное уравнение, содержащее неизвестные. Это уравнение позволяет выразить одну неизвестную через другие и затем использовать для решения способ подстановки.

Остановимся на самых распространенных системах нелинейных уравнений.

а) Системы, содержащие одно линейное уравнение

Как правило, такие системы решаются способом подстановки. Из линейного уравнения одна из неизвестных выражается через другую и подставляется в оставшееся уравнение. Затем это уравнение с одной неизвестной решается, потом определяется и вторая неизвестная.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

Так как в системе второе уравнение является линейным, то выразим из него, например, неизвестную $y=-(x+8)$ и подставим в первое уравнение: $x^2+(x+8)^2+6x-2(x+8)=0$ или $x^2+10x+24=0$. Корни этого уравнения: $x_1=-6$ (и тогда $y_1=-2$) и $x_2=-4$ ($y_2=-4$). Итак, система имеет два решения: $(-6; -2)$, $(-4; -4)$.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5, \\ xy=2. \end{cases}$

В данной системе линейного уравнения нет, но оно легко может быть получено из первого уравнения. Введем замену $t=\dfrac{x+y}{x-y}$ и получим уравнение: $t+\dfrac{6}{t}=5$, корни которого $t_1=2$, $t_2=3$. В первом случае имеем: $2=\dfrac{x+y}{x-y}$ или $x=3y$. Тогда получаем систему: $\begin{cases} x=3y, \\ xy=2, \end{cases}$ которая имеет решения: $\left(-3\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$, $\left(3\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Во втором случае $3=\dfrac{x+y}{x-y}$ или $x=2y$. Тогда получаем систему: $\begin{cases} x=2y, \\ xy=2, \end{cases}$ которая имеет решения: $(-2; -1)$, $(2; 1)$. Таким образом, исходная система имеет четыре решения.

б) Системы, которые с помощью замен сводятся к линейным

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{1}{x-y+1}=2, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{4}{x-y+1}=7. \end{cases}$

Введем замены неизвестных: $u=\frac{1}{x+y-1}$ и $v=\frac{1}{x-y+1}$ – и получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} u+v=2, \\ 3u+4v=7. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение: $u=1$, $v=1$. Возвращаясь к неизвестным x и y, опять получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} x+y-1=1, \\ x-y+1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение: $x=1$, $y=1$.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3xy=2x+2y, \\ \frac{4xz}{x+z}=3, \\ \frac{5}{6}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}. \end{cases}$

Подсказкой в данном примере служит третье уравнение. Легко сообразить, что первое и второе уравнения могут быть приведены к аналогичному виду. Например, для второго уравнения необходимо сделать следующие преобразования: $\frac{4xz}{x+z}=3$, $4xz=3(x+z)$, $\frac{4}{3}=\frac{x+z}{xz}$, $\frac{4}{3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$. Таким образом, имеем систему: $\begin{cases} \frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \\ \frac{4}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}, \\ \frac{5}{6}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}. \end{cases}$

Теперь замена неизвестных очевидна: $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$, $w=\frac{1}{z}$. Тогда получаем систему линейных уравнений: $\begin{cases} \frac{3}{2}=u+v, \\ \frac{4}{3}=u+w, \\ \frac{5}{6}=v+w. \end{cases}$ Характерной особенностью полученной системы является то, что в ней неизвестные u, v, w входят по два раза. Поэтому удобно сложить все три уравнения системы: $\frac{22}{6} = 2\cdot(u+v+w)$, откуда $\frac{11}{6} = u+v+w$. Вычитая из этого соотношения каждое из уравнений системы, соответственно, получим: $\frac{1}{3} = w$, $\frac{1}{2} = v$, $1 = u$. После этого легко найти исходные неизвестные: $x = \frac{1}{u} = 1$; $y = \frac{1}{v} = 2$; $z = \frac{1}{w} = 3$. Таким образом, система имеет единственное решение (1; 2; 3).

в) Однородные системы

Системы уравнений, у которых левая часть одного из уравнений является однородным многочленом, а правая часть равна нулю или у которых левые части двух уравнений являются однородными многочленами, а правые части равны числам, не равным нулю, называются однородными системами уравнений.

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. \end{cases}$

Первое уравнение этой системы является однородным (слева стоит однородный многочлен второй степени по переменным x и y, справа – нуль). Решим его относительно неизвестной y, считая x постоянной величиной, и получим: $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$. Подставим полученное соотношение во второе уравнение. В случае $y = -x$ имеем: $x^2 - x(-x) - (-x)^2 + 3x + 7(-x) + 3 = 0$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = -3$. В случае $y = \frac{x}{2}$ получаем: $x^2 - x\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3x + 7\frac{x}{2} + 3 = 0$ или $x^2 + 26x + 12 = 0$. Тогда $x_{3,4} = -13 \pm \sqrt{157}$; $y_{3,4} = \frac{-13 \pm \sqrt{157}}{2}$. Итак, система уравнений имеет четыре решения.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

Левые части уравнения представляют собой однородные многочлены второй степени, что позволяет свести задачу к предыдущей. Необходимо только избавиться от чисел в правой части. Для этого умножим первое уравнение на 5: $5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105$, второе – на (–7): $-14xy + 7y^2 = -105$ – и полученные уравнения сложим: $12y^2 - 19xy + 5x^2 = 0$. Решая это уравнение, найдем: $y = \frac{5}{4}x$ и $y = \frac{x}{3}$. Для нахождения x можно использовать любое из уравнений исходной системы, например второе. В случае $y = \frac{5}{4}x$ имеем: $2x\frac{5}{4}x - \left(\frac{5}{4}x\right)^2 = 15$ или $x^2 = 16$. Тогда $x_1 = -4$, $y_1 = -5$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$. В случае $y = \frac{x}{3}$ получаем: $2x\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 15$ или $x^2 = 27$. Тогда $x_3 = -3\sqrt{3}$, $y_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 3\sqrt{3}$, $y_4 = \sqrt{3}$. Данная система уравнений также имеет четыре решения.

г) Симметричные системы

Система уравнений называется симметричной, если при замене x на y, а y на x уравнения системы не меняются. Для решения симметричных систем в качестве новых переменных используют простейшие симметричные выражения: $u = x + y$, $v = xy$ (способ замены неизвестных).

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

Система уравнений является симметричной, так как при замене x на y, а y на x получаем систему $\begin{cases} y + x + yx = 5, \\ y^2 + x^2 + yx = 7, \end{cases}$ которая с точностью до перестановки слагаемых и сомножителей совпадает с исходной.

Введем новые неизвестные: $u = x + y$, $v = xy$. Учтем, что $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Тогда исходная система будет иметь вид: $\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 - v = 7. \end{cases}$ Сложив уравнения системы, получим квадратное уравнение для определения u: $u^2 + u - 12 = 0$, откуда $u_1 = -4$,

$u_2 = 3$. Тогда $v_1 = 9$, $v_2 = 2$. Возвращаясь к старым неизвестным, получаем системы $\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=3. \\ xy=2. \end{cases}$ Решение этих систем труда не вызывает, так как первое уравнение в них линейное. Решая их, получим для первой системы – отсутствие решений, для второй – (1; 2), (2; 1).

Заметим, что симметричность системы сказалась и на симметричности ответов: если симметричная система имеет решение (a; b), то она имеет и решение (b; a). В нашем случае были получены симметричные ответы (1; 2) и (2; 1).

Во многих случаях система, не являющаяся симметричной, с помощью соответствующих замен неизвестных может быть сведена к таковой.

Пример 8

Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

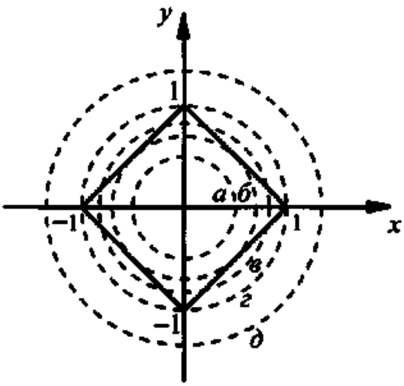
Введем новые неизвестные $u = x + y$, $v=\dfrac{x}{y}$ и получим симметричную систему уравнений $\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2}, \\ uv=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ Решения этой системы: $u_1 = 1$, $v_1=-\dfrac{1}{2}$; $u_2=-\dfrac{1}{2}$, $v_2 = 1$. Получаем системы уравнений: $\begin{cases} x+y=1, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=1, \end{cases}$ которые являются линейными. Решение первой системы (–1; 2), второй: $\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$.

В заключение этой темы заметим, что при анализе или решении линейных или нелинейных систем уравнений полезно использовать графические методы.

Пример 9

Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$?

Записав первое уравнение в виде $|y| = 1 - |x|$, нетрудно построить его график. Им будет квадрат, отсекающий на осях координат единичные отрезки (сплошные линии). Графиком второго уравнения является окружность радиуса $|a|$ с центром в начале координат (штрихпунктирные линии). Из рисунка видны следующие возможные случаи: окружности *а* и *д* не имеют точек пересечения с квадратом, т. е. система не имеет решений; окружности *б* и *г* имеют с квадратом четыре общие точки, т. е. система имеет четыре решения; окружность *в* пересекает квадрат в восьми точках, т. е. система имеет восемь решений.



Установим, при каких значениях $|a|$ имеют место эти случаи. Прежде всего отметим, что диагональ квадрата равна 2, а его сторона – $\sqrt{2}$. Из рисунка видно, что радиус окружности *б* равен половине стороны квадрата, т. е. $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Радиус окружности *г* равен половине диагонали квадрата, т. е. $|a| = 1$. Теперь можно записать ответ: при $|a| \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ система решений не имеет; при $|a| \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}$ система имеет четыре решения; при $|a| \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ система имеет восемь решений.

Отметим, что иногда встречаются и системы двух уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим подход к таким задачам.

Пример 10

Дана система уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{3}=1. \end{cases}$ Найдем сумму неизвестных $x + y + z$.

Умножим первое уравнение на 12, второе – на 30. Получим систему уравнений $\begin{cases} 4x+y-3z=12, \\ 3x+6y+10z=30. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $7x + 7y + 7z = 42$, откуда $x + y + z = 6$. Сумма неизвестных найдена: $x + y + z = 6$. При этом сами неизвестные (по отдельности) найти невозможно.

Пример 11

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-8x-2y=-17, \\ 3z-x+5y=-8. \end{cases}$

В первом уравнении системы выделим квадраты разности по переменным x и y: $(x^2-8x+16)+(y^2-2y+1)=-17+17$ или $(x-4)^2+(y-1)^2=0$. Каждое слагаемое в этой сумме неотрицательное. Поэтому равенство выполняется только при $x - 4 = 0$ и $y - 1 = 0$, откуда $x = 4$ и $y = 1$. Подставим эти значения во второе уравнение системы: $3z - 4 + 5 \cdot 1 = -8$ или $3z = -9$, откуда $z = -3$. Итак, данная система имеет единственное решение $x = 4, y = 1, z = -3$.

Заметим, что во многих случаях решение системы уравнений вызывает очень большие трудности и требует значительной наблюдательности и навыков решения самых различных задач.

Пример 12

Решим систему уравнений $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

Умножим второе уравнение системы на 2 и получим:

$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 6x^2-4y^2+10xy-34x-12y+40=0. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения и получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases}(16x^2+y^2+8xy)-72x-18y+81=0,\\(4x^2+9y^2-12xy)-4x+6y+1=0,\end{cases}$$ или

$$\begin{cases}(4x+y)^2-18(4x+y)+81=0,\\(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0,\end{cases}$$ или $$\begin{cases}(4x+y-9)^2=0,\\(2x-3y-1)^2=0.\end{cases}$$ Такая система равносильна системе линейных уравнений $\begin{cases}4x+y-9=0,\\2x-3y-1=0,\end{cases}$ которая имеет единственное решение $x=2$, $y=1$.

IV. Контрольные вопросы

1. Как решаются системы, содержащие линейное уравнение?
2. Дайте определение однородной системы уравнений.
3. Решение однородных систем уравнений.
4. Определение симметричной системы уравнений.
5. Как решаются симметричные системы уравнений?

V. Задания на уроках и на дом (творческие задания)

Решите системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases}\dfrac{5x+6}{5y+6}=\dfrac{6x+5}{6y+5},\\\dfrac{5}{x}=\dfrac{1}{6-y};\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{4x+5}{4y+5}=\dfrac{5x+4}{5y+4},\\\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{5-y};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{3x+2y}{3x-2y}=\dfrac{25}{3x+2y},\\3x+2y=5;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{2x-3y}{2x+3y}=\dfrac{49}{2x-3y},\\2x-3y=7;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=32,\\\dfrac{x^2}{32y}+\dfrac{32y^2}{x}=33;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}=33,\\\dfrac{x^2}{33y}+\dfrac{33y^2}{x}=34;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\dfrac{y}{x+5}=-5,\\y^2+\dfrac{y^2}{x+5}=6;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\dfrac{y}{x+6}=-6,\\y^2+\dfrac{y^2}{x+6}=7;\end{cases}$

9) $\begin{cases}(x-y)^2+4(x+y)^2=5,\\\dfrac{1}{x^2-2xy+9y^2}=\dfrac{1}{9};\end{cases}$

10) $\begin{cases}24x+\dfrac{121}{y}=y,\\24y+\dfrac{121}{x}=x;\end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{2y-3}+\dfrac{2y}{2x-3}=-3, \\ \dfrac{3x}{2y-3}-\dfrac{2y}{2x-3}=-1; \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2=1, \\ \dfrac{x^2+5y^2+3x-2}{4y^2+3x+11}=1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x}{1-\dfrac{5}{x+5}}=\dfrac{y}{1-\dfrac{6}{y+6}}, \\ 5x-y=xy+5; \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{8}{|x^2-9x|+4}=y^2+2, \\ \dfrac{x+19y}{x+y-8}=9; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4(x^3+y^3)=x^2y^2, \\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15}, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}; \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y}=2, \\ \dfrac{4xz}{x+z}=3, \\ \dfrac{5yz}{y+z}=6; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{xy}, \\ 1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{yz}, \\ 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xz}; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{2}{(2x-3z)^2+1}+\dfrac{3}{(3y-4z)^2+1}=5, \\ 2x+3y+4z=66. \end{cases}$

Найдите все пары (x; y) целых чисел x и y, которые являются решениями системы уравнений:

20) $\begin{cases} x=\dfrac{7y-34}{y-5}, \\ x^2+y^2=52; \end{cases}$

21) $\begin{cases} y=3x+\dfrac{5}{3x+1}, \\ x^3=y-1. \end{cases}$

Решите системы иррациональных уравнений:

22) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+6=5\sqrt{\dfrac{x}{y}}, \\ x+y=40; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+2y-24\sqrt{x+2y}+144=0, \\ x-2y=44; \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x-y-18\sqrt{3x-y}+81=0, \\ 3x+y-6\sqrt{3x+y}+9=0; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-\sqrt{10}, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$

26) $\begin{cases} \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=8, \\ (x-5)\sqrt{y+4}+(y+4)\sqrt{x-5}=96; \end{cases}$

27) $\begin{cases} |2x-5z|+\sqrt{3y-4z}=0, \\ 2x+3y+z=10; \end{cases}$

28) $\begin{cases} \sqrt{(x-2y)^2+4}+\sqrt{(z-11y)^2+121}=13, \\ x+y+z=14; \end{cases}$

29) $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}, \\ xy=15; \end{cases}$

30) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4. \end{cases}$

Ответы: 1) (5; 5); 2) (5; 5); 3) (1; 1); 4) (2; –1); 5) (32; 1); 6) (33; 1); 7) $\left(-\frac{31}{5}; 6\right)$, $\left(-\frac{24}{5}; -1\right)$; 8) $\left(-\frac{43}{6}; 7\right)$, $\left(-\frac{35}{6}; -1\right)$; 9) (0; 1), (0; –1), $\left(-\frac{8}{\sqrt{41}}; \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{41}}; -\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$; 10) $\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{5}\right)$, $\left(-\frac{11}{5}; \frac{11}{5}\right)$; 11) (1; 1); 12) (2; 3), (3; 2); 13) (4; 3); 14) (9; 0); 15) (9; 18), (18; 9); 16) (1; 2; 3); 17) (1; 2; 3); 18) (–3; –4; –2); 19) (9; 8; 6); 20) (6; 4); 21) (–2; –7); 22) (32; 8), (36; 4); 23) (94; 25); 24) (15; –36); 25) (–2; –5); 26) (9; 32), (41; 0); 27) $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}; 1\right)$; 28) (2; 1; 11); 29) (5; 3), $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}}; -\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}\right)$; 30) $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 27–28. Контрольная работа по теме «Системы уравнений»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2x^2 - y = 7 \end{cases}$ способом сложения.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$ способом подстановки.

3. Периметр прямоугольника равен 28 см, а его площадь равна 40 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $2|x| + |y| = 4$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge x + 1. \end{cases}$

5. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $(y - 2x)(y + x + 1) < 0$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - y = 9, \\ 3x^2 + y = 11 \end{cases}$ способом сложения.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$ способом подстановки.

3. Периметр прямоугольника равен 26 см, а его площадь равна 42 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|x| + 2|y| = 4$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge x - 1. \end{cases}$

5. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $(y+2x)(y-x-1)<0$.

Вариант 3

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0, \\ 2x^2+y^2=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

2. Произведение двух натуральных чисел равно 154, а сумма их квадратов равна 317. Найдите эти числа.

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $x^2-6x+y^2+4y=3$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 9, \\ y\ge |x|+1. \end{cases}$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения $\dfrac{x^2+y^2-4y}{y-1}=0$.

Вариант 4

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2+2y^2=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

2. Произведение двух натуральных чисел равно 187, а сумма их квадратов равна 410. Найдите эти числа.

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $x^2+4x+y^2-2y=1$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ y\ge 1-|x|. \end{cases}$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения $\dfrac{x^2+6x+y^2}{x+2}=0$.

Вариант 5

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x+y), \\ \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{1}{7}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10. \end{cases}$

2. Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{7y-34}{y-5}, \\ x^2 + y^2 = 52. \end{cases}$

3. Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 мин при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 мин на том же пути. Найти скорость велосипедиста и длину пути.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|y^2 - x^2| = y + x$;

б) неравенства $|3x - y + 1| \le 2$.

Вариант 6

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4(x+y), \\ \dfrac{1}{5x-4y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 9, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48. \end{cases}$

2. Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{6y-23}{y-4}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$

3. Если велосипедист увеличит скорость на 9 км/ч, то получит выигрыш во времени 27 мин при прохождении некоторого пути.

Если же он уменьшит скорость на 5 км/ч, то потеряет 29 мин на том же пути. Найти скорость велосипедиста и длину пути.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|y^2 - x^2| = y - x$;

б) неравенства $|2x + y - 2| \le 1$.

Урок 29. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. $(2; 1)$, $(-3{,}5; 17{,}5)$.
2. $(1; 2)$, $\left(\frac{1}{13}; -\frac{22}{13}\right)$.
3. 4 см и 10 см.
4. а, б – построено.
5. Построено.

Вариант 2

1. $(2; -1)$, $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{67}{3}\right)$.
2. $(1; -2)$, $\left(-\frac{2}{7}; \frac{13}{7}\right)$.
3. 6 см и 7 см.
4. а, б – построено.
5. Построено.

Вариант 3

1. а) $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $\left(-\frac{3\sqrt{57}}{19}; \frac{\sqrt{57}}{19}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{57}}{19}; -\frac{\sqrt{57}}{19}\right)$; б) $(1; 2)$, $(2; 1)$.
2. 14 и 11.
3. а, б – построено.
4. Построено.

Вариант 4

1. а) $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $\left(\frac{3\sqrt{33}}{11}; \frac{\sqrt{33}}{11}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{33}}{11}; -\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$; б) $(1; 3)$, $(3; 1)$.
2. 17 и 11.
3. а, б – построено.
4. Построено.

Вариант 5

1а. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x+y), \\ \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-y-3) = 0, \\ 4x - 3y = 7. \end{cases}$ В первом уравнении произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из этих множителей равен нулю. Получаем две системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 4x - 3y = 7, \end{cases}$ ее решение $x = 1$, $y = -1$;

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 4x - 3y = 7, \end{cases}$ ее решение $x = -2$, $y = -5$.

Ответ: $(1; -1)$; $(-2; -5)$.

1б. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ в первом уравнении введем новую переменную: $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} > 0$. Получаем уравнение: $3t + 2\cdot\dfrac{1}{t} = 5$ или $3t^2 - 5t + 2 = 0$, корни которого $t = 1$ и $t = \dfrac{2}{3}$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y}, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2$ и $x = y = 4$;

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{2}{3}, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{2}{3}\sqrt{y}, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x} = \dfrac{20}{11}$, $\sqrt{y} = \dfrac{30}{11}$ и $x = \dfrac{400}{121}$, $y = \dfrac{900}{121}$.

Ответ: (4; 4); $\left(\dfrac{400}{121}; \dfrac{900}{121}\right)$.

2. В первом уравнении системы $\begin{cases} x = \dfrac{7y-34}{y-5}, \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}$ выделим целую часть и запишем его в виде $x = \dfrac{7y-35+1}{y-5} = 7 + \dfrac{1}{y-5}$. Так как x и y – целые числа, то $y - 5 = 1$ (тогда $y = 6$ и $x = 8$) или $y - 5 = -1$ (тогда $y = 4$ и $x = 6$). Легко проверить, что второму уравнению системы удовлетворяет только решение (6; 4).

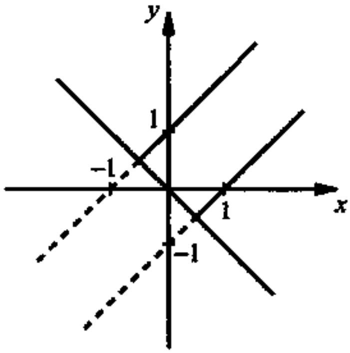
Ответ: (6; 4).

3. Пусть скорость велосипедиста x км/ч и длина пути y км. Запишем условия задачи: $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+5} = \dfrac{12}{60}, \\ \dfrac{y}{x-8} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{40}{60} \end{cases}$ или $\begin{cases} 25y = x(x+5), \\ 12y = x(x-8). \end{cases}$ Разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{25}{12} = \dfrac{x+5}{x-8}$ – и найдем $x = 20$. Например, из первого уравнения определим $y = \dfrac{x(x+5)}{25} = 20$.

Ответ: 20 км/ч и 20 км.

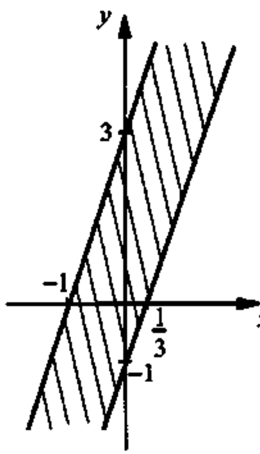
4а. В уравнении $|y^2 - x^2| = y + x$ учтем, что $y + x \geq 0$, т. е. $y \geq -x$. Запишем уравнение в виде $(y + x)|y - x| = y + x$ или $(y + x)(|y - x| - 1) = 0$, откуда $y + x = 0$ (т. е. $y = -x$) и $|y - x| - 1 = 0$, или $|y - x| = 1$, или $y - x = \pm 1$ (т. е. $y = x \pm 1$).

Построим прямую $y = -x$ и две параллельные прямые $y = x \pm 1$ для $y > -x$. Получаем график данного уравнения:



Ответ: построено.

4б. Неравенство $|3x - y + 1| \le 2$ запишем в виде $-2 \le 3x - y + 1 \le 2$, или $-3 \le 3x - y \le 1$, или $3 \ge y - 3x \ge -1$, или $3x - 1 \le y \le 3x + 3$. Построим две параллельные прямые $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 3$. Легко проверить, что данному неравенству удовлетворяет множество точек, расположенных между этими прямыми. Получаем график данного неравенства:



Ответ: построено.

Вариант 6

1а. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4(x+y), \\ \dfrac{1}{5x-4y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-y-4) = 0, \\ 5x - 4y = 9. \end{cases}$ В первом уравнении произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из этих множителей равен нулю. Получаем две системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 5x-4y=9, \end{cases}$ ее решение $x=1, y=-1$;

б) $\begin{cases} x-y=4, \\ 5x-4y=9, \end{cases}$ ее решение $x=-7, y=-11$.

Ответ: $(1;-1)$; $(-7;-11)$.

16. Для решения системы уравнений $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=9, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$ в первом уравнении введем новую переменную $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}>0$. Получаем уравнение: $4t+\dfrac{2}{t}=9$ или $4t^2-9t+2=0$, корни которого $t=2$ и $t=\dfrac{1}{4}$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}=2, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x}=2\sqrt{y}, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x}=6$, $\sqrt{y}=3$ и $x=36, y=9$;

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{4}, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{1}{4}\sqrt{y}, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x}=\dfrac{16}{5}$, $\sqrt{y}=\dfrac{4}{5}$ и $x=\dfrac{256}{25}$, $y=\dfrac{16}{25}$.

Ответ: $(36;9)$; $\left(\dfrac{256}{25};\dfrac{16}{25}\right)$.

2. В первом уравнении системы $\begin{cases} x=\dfrac{6y-23}{y-4}, \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ выделим целую часть и запишем его в виде $x=\dfrac{6y-24+1}{y-4}=6+\dfrac{1}{y-4}$. Так как x и y – целые числа, то $y-4=1$ (тогда $y=5$ и $x=7$) или $y-4=-1$ (тогда y

$= 3$ и $x = 5$). Легко проверить, что второму уравнению системы удовлетворяет только решение (5; 3).

Ответ: (5; 3).

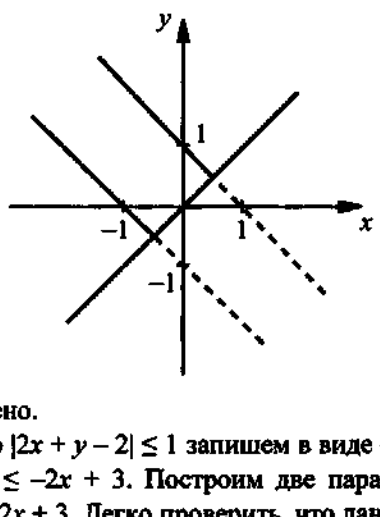
3. Пусть скорость велосипедиста x км/ч и длина пути y км. Запишем условия задачи: $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+9} = \dfrac{27}{60}, \\ \dfrac{y}{x-5} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{29}{60} \end{cases}$ или $\begin{cases} 9 \cdot 60y = 27x(x+9), \\ 5 \cdot 60y = 29x(x-5). \end{cases}$

Разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{9}{5} = \dfrac{27(x+9)}{29(x-5)}$ – и найдем $x = 20$.

Например, из первого уравнения определим $y = \dfrac{x(x+9)}{20} = 29$.

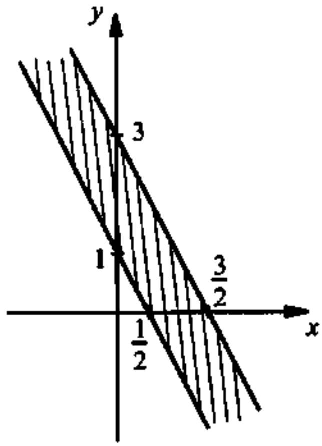
Ответ: 20 км/ч и 29 км.

4а. В уравнении $|y^2 - x^2| = y - x$ учтем, что $y - x \geq 0$, т. е. $y \geq x$. Запишем уравнение в виде $(y - x)|y + x| = y - x$ или $(y - x)(|y + x| - 1) = 0$, откуда $y - x = 0$ (т. е. $y = x$) и $|y - x| - 1 = 0$, или $|y + x| = 1$, или $y + x = \pm 1$ (т. е. $y = -x \pm 1$). Построим прямую $y = x$ и две параллельные прямые $y = -x \pm 1$ для $y > x$. Получаем график данного уравнения:



Ответ: построено.

4б. Неравенство $|2x + y - 2| \leq 1$ запишем в виде $-1 \leq 2x + y - 2 \leq 1$ или $-2x + 1 \leq y \leq -2x + 3$. Построим две параллельные прямые $y = -2x + 1$ и $y = -2x + 3$. Легко проверить, что данному неравенству удовлетворяет множество точек, расположенных между этими прямыми. Получаем график данного неравенства:



Ответ: построено.

Уроки 30–31. Зачетная работа по теме «Системы уравнений»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x-1)(y+4)=0,\\ y^2+xy-2=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=9.\end{cases}$

2. Даша и Таня пропалывают грядку за 12 мин, а одна Даша – за 20 мин. За сколько минут пропалывает грядку одна Таня?

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $\dfrac{4y^2 - x^2}{y+2} = 0$;

б) неравенства $(y-1)(y-x) \le 0$;

в) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \le x. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-2)\sqrt{y-3} = 0, \\ x + y = 4. \end{cases}$

B

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 25x^2 + 5x - y^2 = x^4 + 16, \\ 5x - y^2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\sqrt{3x^2 - 8x - 2} + 3\sqrt{y+3} = 7, \\ 4\sqrt{y+3} - 3\sqrt{3x^2 - 8x - 2} = 1. \end{cases}$

6. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 60%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата жены?

7. На координатной плоскости изобразите множество решений неравенства $\dfrac{x^2 - x - 2}{y - x} \ge 0$.

C

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ |x+y| + |x - 3y| = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x - 6} = y, \\ \sqrt{y^2 + 5y - 6} = x. \end{cases}$

9. Найдите значение параметра, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения.

Вариант 2

А

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x+2)(y-1)=0,\\ x^2-xy-12=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4,\\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=10.\end{cases}$

2. Олег и Витя вскапывают грядку за 10 мин, а один Олег – за 15 мин. За сколько минут вскапывает грядку один Витя?

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $\dfrac{y^2-4x^2}{x+1}=0$;

б) неравенства $(x+1)(y+x)\le 0$;

в) системы неравенств $\begin{cases}x^2+y^2\le 9,\\ y\ge 2x.\end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-4)\sqrt{y-6}=0,\\ x+y=8.\end{cases}$

В

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}16x^2+3x-y^2=x^4+8,\\ 3x-y^2=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2\sqrt{3x^2-10x+9}+3\sqrt{y-2}=5,\\ 2\sqrt{y-2}-3\sqrt{3x^2-10x+9}=-1.\end{cases}$

6. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 45%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата мужа?

7. На координатной плоскости изобразите множество решений неравенства $\dfrac{y^2+y-2}{y+x}\le 0$.

С

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+5xy+6y^2=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x-7}=y, \\ \sqrt{y^2+4y-7}=x. \end{cases}$

9. Найдите значение параметра, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1-a), \\ (x-y)^2=4 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. а) (1; 1), (1; –2), (3,5; 4); б) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
2. 30 мин.
3. а–в – построено.
4. (1; 3).
5. а) (5; 3), (5; –3); б) (3; –2), $\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$.
6. На 40 %.
7. Построено.

8а. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16 \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-3y)=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16. \end{cases}$ Так как в первом уравнении произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-x, \\ |4x|=16, \end{cases}$ откуда $x=4$, $y=-4$ и $x=-4$, $y=4$;

б) $\begin{cases} x-3y=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3y, \\ |4y|=16, \end{cases}$ откуда $x=12$, $y=4$ и $x=-12$, $y=-4$.

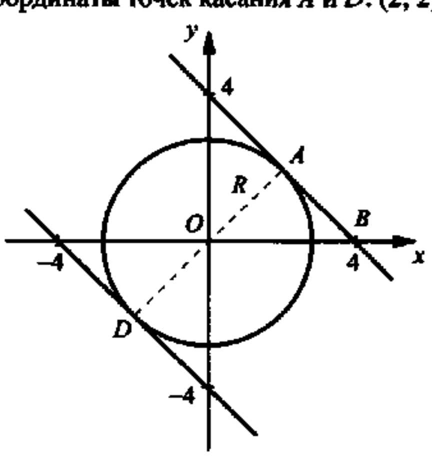
Ответ: (4; –4), (–4; 4), (12; 4), (–12; –4).

8б. Для системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{x^2+5x-6}=y,\\ \sqrt{y^2+5y-6}=x\end{cases}$ учтем, что $x, y \geq 0$,

и возведем в квадрат уравнения: $\begin{cases}x^2+5x-6=y^2,\\ y^2+5y-6=x^2.\end{cases}$ Вычтем уравнения системы и получим: $x^2-y^2+5x-5y=y^2-x^2$, или $2(x-y)(x+y)+5(x-y)=0$, или $(x-y)(2x+2y+5)=0$. Так как x, $y \geq 0$, то в произведении только первый множитель равен нулю, т. е. $y=x$. Подставим это значение в первое уравнение: $x^2+5x-6=x^2$, откуда $5x-6=0$ и $x=1{,}2$, $y=1{,}2$.

Ответ: (1,2; 1,2).

9. Удобнее всего исследовать систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a),\\ (x+y)^2=16\end{cases}$ графически. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиуса $R=\sqrt{2(1+a)}$. Графиком второго уравнения будут две параллельные прямые: $x+y=\pm 4$ или $y=-x\pm 4$. Очевидно, что данная система будет иметь ровно два решения, если построенные прямые будут касаться окружности. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB получаем условие: $OB=OA\sqrt{2}$, или $4=\sqrt{2(1+a)}\cdot\sqrt{2}$, или $4=1+a$, откуда $a=3$. Легко найти решения системы, т. е. координаты точек касания A и D: (2; 2) и (–2; –2).



Ответ: при $a=3$, (2; 2) и (–2; –2).

Вариант 2

1. а) $(-2; 4)$, $(-3; 1)$, $(4; 1)$; б) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

2. 30 мин.

3. а–в – построено.

4. $(2; 6)$.

5. а) $(4; 2)$, $(4; -2)$; б) $(2; 3)$, $\left(\frac{4}{3}; 3\right)$.

6. На 55 %.

7. Построено.

8а. Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2+5xy+6y^2=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12 \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+2y)(x+3y)=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12. \end{cases}$ Так как в первом уравнении произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2y, \\ |y|=12, \end{cases}$ откуда $x = 24$, $y = -12$ и $x=-24$, $y=12$;

б) $\begin{cases} x+3y=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3y, \\ |y|=12, \end{cases}$ откуда $x = 36$, $y = -12$ и $x=-36$, $y=12$.

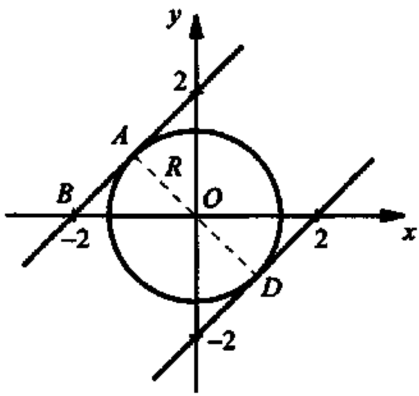
Ответ: $(24; -12)$, $(-24; 12)$, $(36; -12)$, $(-36; 12)$.

8б. Для системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x-7}=y, \\ \sqrt{y^2+4y-7}=x \end{cases}$ учтем, что $x, y \ge 0$, и возведем в квадрат уравнения: $\begin{cases} x^2+4x-7=y^2, \\ y^2+4y-7=x^2. \end{cases}$ Вычтем уравнения системы и получим: $x^2-y^2+4x-4y=y^2-x^2$, или $2(x-y)(x+y)+4(x-y)=0$, или $(x-y)(x+y+2)=0$. Так как x, $y \ge 0$, то в произведении только первый множитель равен нулю, т. е.

$y = x$. Подставим это значение в первое уравнение: $x^2 + 4x - 7 = x^2$, откуда $4x - 7 = 0$ и $x = \frac{7}{4}$, $y = \frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

9. Удобнее всего исследовать систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1-a), \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases}$ графически. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиуса $R = \sqrt{2(1-a)}$. Графиком второго уравнения будут две параллельные прямые: $y - x = \pm 2$ или $y = x \pm 2$. Очевидно, что данная система будет иметь ровно два решения, если построенные прямые будут касаться окружности. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB получаем условие: $OB = OA\sqrt{2}$, или $2 = \sqrt{2(1-a)} \cdot \sqrt{2}$, или $1 = 1 - a$, откуда $a = 0$. Легко найти решения системы, т. е. координаты точек касания A и D: $(-1; 1)$ и $(1; -1)$.



Ответ: при $a = 0$, $(-1; 1)$ и $(1; -1)$.

Глава 3
Числовые функции

Понятие функции является основополагающим для всего курса алгебры. С функцией непосредственно связаны понятия уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств, последовательности и прогрессий. Поэтому необходимо обратить самое серьезное внимание на эту тему.

Уроки 32–33. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции

Цель: уточнить понятие функции и ее основные характеристики: область определения и область значений.

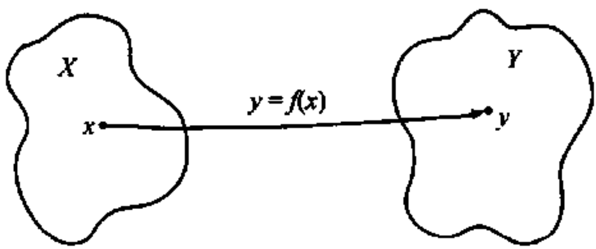
Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

С понятием функции школьники познакомились уже в 7 классе. Теперь необходимо уточнить и развить это понятие.

Определение 1. Пусть даны числовые множества X и Y. Если указано правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из X определенный элемент y из множества Y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений Y. При этом переменную x называют независимой переменной или аргументом, переменную y – зависимой переменной.



Для области определения функции $y = f(x)$ принято обозначение $D(f)$, для области значений – обозначение $E(f)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x-3}-1$. Чтобы найти значение y для каждой величины x, надо выполнить следующие действия (операции):

1) из величины x вычесть число 3 (получим величину $x-3$);

2) из полученного результата извлечь квадратный корень (получим значение $\sqrt{x-3}$);

3) из этой величины вычесть число 1 (получим значение $\sqrt{x-3}-1$, т. е. значение функции y).

Совокупность этих операций (действий) и есть функция $y = f(x)$ или $y=\sqrt{x-3}-1$. Очевидно, квадратный корень можно извлечь только из неотрицательной величины. Поэтому $x - 3 \geq 0$ и $x \geq 3$. Следовательно, область определения функции $D(f) = [3; +\infty)$. Квадратный корень (по определению) величина неотрицательная, т. е. $\sqrt{x-3} \geq 0$. Вычтем из обеих частей этого неравенства число 1 и получим: $\sqrt{x-3}-1 \geq -1$, т. е. $y \geq -1$. Поэтому область значений функции $E(f) = [-1; +\infty)$.

Пример 2

Найдем область определения функции:

а) $y=2|x-1|-3x+4$;

б) $y=\dfrac{3x-2}{x+3}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$;

г) $y=\sqrt{(x-1)(x+2)^2}$.

В задаче функция задается некоторой формулой (выражением) и область определения функции совпадает с областью допустимых значений такого выражения.

а) В данное выражение входят операции сложения, вычитания, умножения и нахождения модуля. Все эти операции выполнимы при любых значениях переменной x, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

б) В выражение входит деление на величину, зависящую от переменной. Такая операция выполнима, если делитель не равен нулю. Получаем условие: $x + 3 \neq 0$, откуда $x \neq -3$. Поэтому область определения функции все значения x, за исключением точки (-3), т. е. $D(f)=(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$ или $D(f)$: $x \neq -3$.

в) В выражение входит операция извлечения квадратного корня из алгебраической дроби. Эта операция выполнима, если подкоренное выражение неотрицательно. Получаем неравенство: $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$, решение которого $-2 < x \leq 1$. Поэтому область определения функции – промежуток $(-2; 1]$, т. е. $D(f) = (-2; 1]$.

г) Этот пункт аналогичен предыдущему. Область определения функции задается условием $(x-1)(x+2)^2 \geq 0$. Решение такого неравенства: отдельная точка $x = -2$ и промежуток $x \in [1; +\infty)$. Поэтому область определения функции $D(f) = \{-2\} \cup [1; +\infty)$.

Заметим, что в этом примере область определения функции явно не указывалась. Такую область находили, учитывая ОДЗ выражения, задающего функцию. Эту область определения иногда называют *естественной*.

Запись $f(a)$ означает значение функции в точке $x = a$. Чтобы найти это значение в формуле, задающую функцию, вместо аргумента надо подставить величину a.

Пример 3

Рассмотрим линейную функцию $y = 2x + 3$. Найдем:

а) $f(5)$; б) $f(x-4)$; в) $f(3x+1)$; г) $f(f(x))$.

а) Вместо аргумента x подставим число 5 и найдем значение функции $f(5) = 2\cdot 5 + 3 = 13$.

б) Вместо аргумента x подставим величину $x - 4$ и получим: $f(x-4) = 2(x-4) + 3 = 2x - 5$.

в) Аналогично предыдущему пункту вместо аргумента x подставим величину $3x + 1$ и найдем значение функции $f(3x+1) = 2(3x+1) + 3 = 6x + 5$.

г) В этом случае рассматривается, т. е. функция, аргументом которой тоже является функция. Получаем: $f(f(x)) = f(2x+3) + 3 = 2(2x+3) + 3 = 4x + 9$.

Подобным образом поступают и в случае кусочной функции.

Пример 4

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in (-\infty; -1), \\ 1, \text{ если } x \in [-1; 1], \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Найдем: $f(-3)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(5)$.

Область определения функции состоит из трех промежутков: $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$. Объединив их, получим всю числовую ось, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. При вычислении значения $f(a)$ надо определить, в какой промежуток попадает точка a. Тогда по соответствующей формуле находим величину $f(a)$.

Точка $x = -3$ принадлежит первому промежутку. Поэтому используем первую формулу и получаем: $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ лежат во втором промежутке. Используем вторую строчку формулы, задающей функцию. Находим: $f(-1) = f(0) = f(1) = 1$.

Точка $x = 5$ принадлежит третьему промежутку. Используем третью формулу и получаем: $f(5) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Часто возникает **обратная задача**: известно значение функции $f(x)$ в точке a (зависящей от переменной x) и надо найти функцию $f(x)$.

Пример 5

Известно, что $f\left(3 - \frac{x}{2}\right) = x^2 - x + 2$. Найдем $f(x)$.

Обозначим $t = 3 - \frac{x}{2}$ и выразим из этого равенства переменную $x = 6 - 2t$. Перепишем условие задачи в виде $f(t) = (6-2t)^2 - (6-2t) + 2 = 4t^2 - 22t + 30$. Получили: $f(t) = 4t^2 - 22t + 30$. Так как аргумент функции можно обозначать любой буквой: t, v, x и т. д., то сразу можно записать: $f(x) = 4x^2 - 22x + 30$.

Существуют и более сложные задачи, которые решаются подобным образом.

Пример 6

Известно, что $2f(x-2) + 3f(2-x) = x^2 + 3x - 1$.

Обозначим $t = x - 2$ (тогда $x = t + 2$) и запишем условие задачи: $2f(t) + 3f(-t) = (t+2)^2 + 3(t+2) - 1 = t^2 + 7t + 9$. Это равенство запишем также для точки $(-t)$. Получаем: $2f(-t) + 3f(t) = (-t)^2 + 7(-t) + 9 = t^2 - 7t + 9$. Итак, для нахождения $f(t)$ имеем систему уравнений: $\begin{cases} 2f(t) + 3f(-t) = t^2 + 7t + 9, \\ 3f(t) + 2f(-t) = t^2 - 7t + 9. \end{cases}$

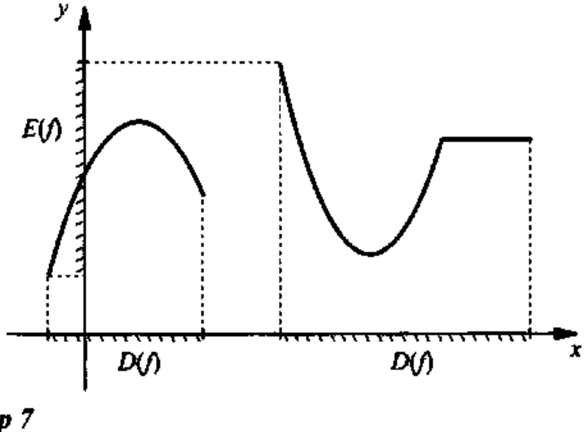
Введем новые переменные: $a = f(t)$ и $b = f(-t)$. Получаем систему линейных уравнений: $\begin{cases} 2a + 3b = t^2 + 7t + 9, \\ 3a + 2b = t^2 - 7t + 9, \end{cases}$ в которой нас интересует только переменная a. Поэтому используем способ алгебраического сложения. Первое уравнение умножим на число (-2), второе –

на число 3. Имеем систему: $\begin{cases} -4a-6b=-2t^2-14t-18, \\ 9a+6b=3t^2-21t+27. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $5a=t^2-35t+9$, откуда $a=\frac{1}{5}t^2-7t+\frac{9}{5}$ или $f(t)=\frac{1}{5}t^2-7t+\frac{9}{5}$. Так же как и в предыдущей задаче, можно написать: $f(x)=\frac{1}{5}x^2-7x+\frac{9}{5}$.

Поведение функции в математике принято изображать специальным рисунком – графиком.

Определение 2. Графиком функции $y=f(x)$, $x\in X$, называют множество F точек $(x;\ y)$ координатной плоскости xOy: $F=\{(x;\ y)\,|\,x\in X,\ y=f(x)\}$.

По графику функции легко установить область определения и область значений функции $y=f(x)$. Для этого точки графика проецируют на ось абсцисс и ось ординат и находят, соответственно, область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$.

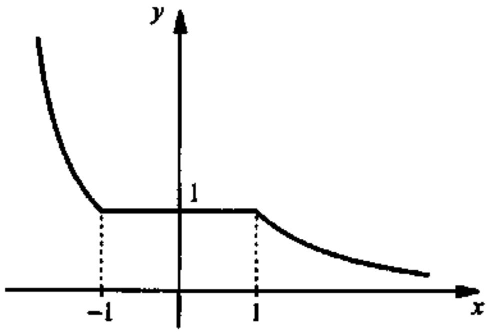


Пример 7

Построим график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\in(-\infty;-1), \\ 1, \text{ если } x\in[-1;1], \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x\in(1;+\infty) \end{cases}$

(пример 4).

Область определения функции состоит из трех промежутков, на каждом из которых функция задается своей формулой. На луче $(-\infty; -1)$ строим график функции $y = x^2$ (парабола), на промежутке $[-1; 1]$ – график функции $y = 1$ (отрезок прямой) и на луче $(1; +\infty)$ – график функции $y = \frac{1}{x}$ (гипербола). Таким образом, получаем график функции $f(x)$:



Область определения этой кусочной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и область значений $E(f) = (0; +\infty)$.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции и поясните его примером.
2. Область определения и область значений функции.
3. Определение графика функции.

IV. Задание на уроках

§ 8, № 2 (а, б); 3 (в); 4 (а); 7 (в); 9 (а, б); 13 (б, в); 16 (а); 17 (а, б); 20 (в, г); 21 (а); 22; 24 (а, в); 26 (б); 30 (а); 32 (в, г); 33 (а, б); 34; 37; 38.

V. Задание на дом

§ 8, № 2 (в, г); 3 (г); 4 (б); 7 (г); 9 (в, г); 13 (а, г); 16 (г); 17 (в, г); 20 (а, б); 21 (в); 23; 24 (б, г); 26 (в); 30 (г); 32 (а, б); 33 (в, г); 35; 36.

VI. Творческие задания

1. Найдите функцию $f(x)$, если известно:

а) $f(x - 3) = x^2 - x$; б) $f(x + 2) = x^2 + 2x$;

в) $f\left(2 - \frac{x}{3}\right) = 2x^2 + x$; г) $f\left(1 + \frac{x}{5}\right) = x^2 - 3x$;

д) $f(x+1) = \frac{x-1}{x+2}$; е) $f(x-1) = \frac{x+3}{x-4}$;

ж) $f\left(\frac{x}{2}-1\right)=\sqrt{3x+2}$; з) $f\left(\frac{x}{3}+2\right)=\sqrt{3-2x}$.

Ответы: а) $f(x)=x^2+5x+6$; б) $f(x)=x^2-2x$; в) $f(x)=18x^2-$ $-39x+78$; г) $f(x)=25x^2-65x+40$; д) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$; е) $f(x)=\frac{x+4}{x-3}$; ж) $f(x)=\sqrt{6x+8}$; з) $f(x)=\sqrt{15-6x}$.

2. Найдите функцию $f(x)$, если известно:

а) $3f(x-1)-2f(1-x)=2x^2-x+1$;

б) $2f(x+3)+f(-x-3)=x^2-3$;

в) $f(x+1)+2f(-x-1)=\frac{x+1}{x-2}$;

г) $3f(x-2)-f(2-x)=\frac{x-3}{x+4}$;

д) $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+x-2$;

е) $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x^2-3x$;

ж) $3f(x)-2f(-x)=\sqrt{4x+3}$;

з) $2f(x)+f(-x)=\sqrt{5-3x}$.

Ответы: а) $f(x)=\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}x+2$; б) $f(x)=\frac{1}{7}x^2-\frac{18}{7}x+\frac{6}{7}$; в) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x+3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x-3}$; г) $f(x)=\frac{3}{10}\cdot\frac{x-1}{x+6}+\frac{1}{10}\cdot\frac{x+1}{x-6}$; д) $f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5x^2}+\frac{3}{5x}-\frac{2}{5}$; е) $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+x-\frac{4}{3x^2}+\frac{2}{x}$; ж) $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{4x+3}+\frac{2}{5}\sqrt{3-4x}$; з) $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{5-3x}-\frac{1}{3}\sqrt{5+3x}$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 34–35. Способы задания функции

Цель: рассмотреть различные способы задания функции и связь между ними.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{2x-3}{3x^2-x-2}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{6x-x^2}}{x^2-4}$.

2. Постройте график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & \text{если } -3\le x\le 1,\\ 3-x, & \text{если } 1<x\le 2.\end{cases}$ Укажите область определения и область значений функции.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{3x-2}{5x^2-2x-3}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{8x-x^2}}{x^2-9}$.

2. Постройте график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ x, & \text{если } 1<x\le 3.\end{cases}$ Укажите область определения и область значений функции.

III. Изучение нового материала

Прежде всего функцию необходимо **задать**, т. е. указать правило, которое позволяет для каждого значения независимой переменной x из области определения функции найти соответствующее значение зависимой переменной y. В зависимости от формулировки такого правила выделяют **три способа задания** функции: аналитический, табличный, графический.

а) **Аналитический** (с помощью формулы или формул)

Пример 1

Рассмотрим функции:

а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$;

б) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$

Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x = -0{,}37$ (так как $x < 0$, то пользуясь верхним выражением) получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \dfrac{2}{3}$ (так как $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y;

в) $3x + y = 2y - x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x + x^2 = 2y - y$ или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y = x^2 + 3x$.

б) **Табличный**

Пример 2

Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

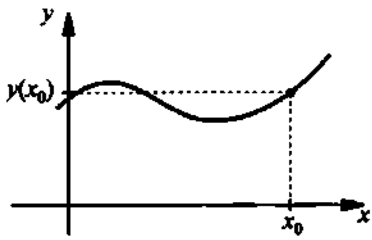
x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задает функцию: для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1{,}5) = 2{,}25$, $y(5) = 25$ и т. д.

в) **Графический**

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться специальным рисунком – графиком функции.

Графиком функции $y(x)$ называют множество всех точек системы координат, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x, а ординаты – соответствующим значениям зависимой переменной y.



В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые удовлетворяют функциональной зависимости $y(x)$, расположены на графике функции. Любые другие пары точек, не удовлетворяющие зависимости $y(x)$, на графике функции не лежат.

Пример 3

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с ординатами: а) $(-2; -6)$; б) $(-3; -10)$?

а) Найдем значение функции y при $x = -2$: $y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3|-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка $A(-2; -6)$ принадлежит графику данной функции.

б) Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3|-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка $B(-3; -10)$ не принадлежит графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. Наиболее полным следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем, табличный способ позволяет быстро и легко найти значение функции для некоторых значений аргумента. График функции наглядно показывает ее поведение. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

В дальнейшем будем считать основным **аналитический способ** задания функции.

Заметим, что не всякое соотношение между переменными x и y является функцией. Функцией называют только такой закон (правило), при котором каждому значению x соответствует только единственное значение y.

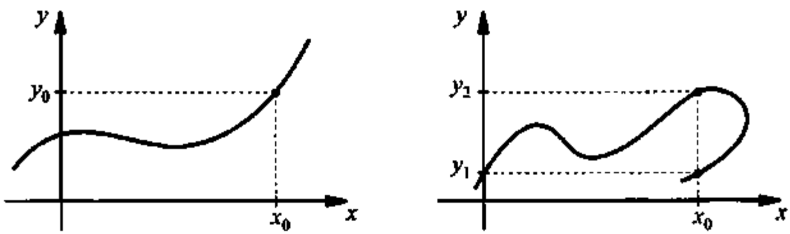
Пример 4

Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x - 3, \\ x^2 + 1 \end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим: $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x ($x = 1$) соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 5

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определить, какая из них является функцией.

На рис. *а* приведен график функции, так как любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), так как существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, значения y_1 и y_2).



а) *б*)

IV. Контрольные вопросы

1. Что означает задать функцию?
2. Основные способы задания функции, их краткая характеристика.

V. Задание на уроках

§ 9, № 1; 3; 6 (а, б); 7; 9 (в, г); 10 (а, б); 13 (в, г); 14; 17 (а); 18 (б); 19 (а).

VI. Задание на дом

§ 9, № 2; 4; 6 (в, г); 8; 9 (а, б); 10 (в, г); 13 (а, б); 15; 17 (б); 18 (а); 19 (б).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 36–39. Свойства функций

Цель: рассмотреть основные свойства функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Постройте график функции:

1) $y = 2x - 4$;

2) $y = x^2 + 2x - 3$;

3) $y = \dfrac{3}{x}$.

Вариант 2

Постройте график функции:

1) $y = 6 - 3x$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3) $y = -\dfrac{4}{x}$.

III. Изучение нового материала

Как уже известно из курса 7–8 классов, любая функция характеризуется определенными свойствами. Часть этих свойств ранее рассмотрена. Теперь необходимо систематизировать эти свойства и рассматривать их при исследовании любых функций и построении их графиков.

Остановимся теперь на основных свойствах функции. С двумя свойствами функции вы уже знакомы – это область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ функции $y = f(x)$. Обсудим другие свойства функции и ее графика.

1. Точки пересечения графика функции с осями координат

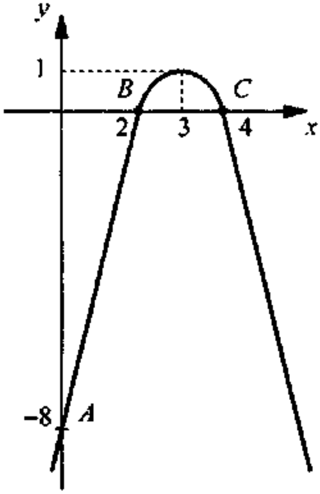
Так как ось $0y$ характерна тем, что любая точка на ней имеет координату $x = 0$, а для оси $0x$ – любая точка на ней имеет координату $y = 0$, то точки пересечения графика с осями координат ищутся очень просто. Точка пересечения с осью $0y$ равна значению функции $y(x)$ при $x = 0$, т. е. $y(0)$. Точки пересечения с осью $0x$ являются корнями уравнения $y(x) = 0$ и называются нулями функции.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$. Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат.

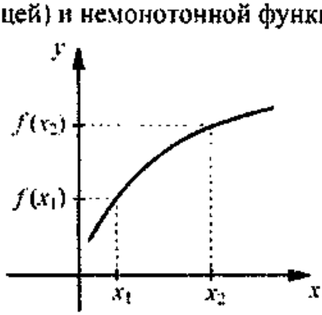
Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки $A(0; -8)$.

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение: $0 = -x^2 + 6x - 8$ или $0 = x^2 - 6x + 8$. Решим его: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$. Для наглядности на рисунке приведен график данной функции (здесь мы несколько забежали вперед).

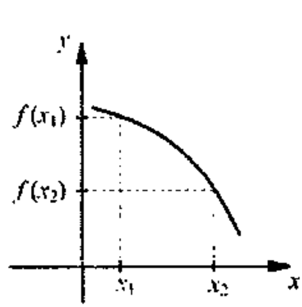


2. Монотонность функции

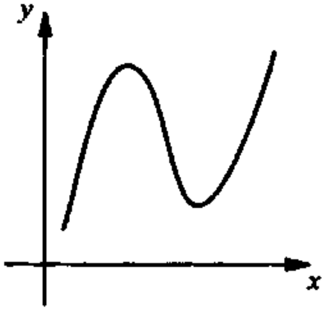
Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (т. е. возрастание или убывание функции). Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$). Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$). На рисунке приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция, $f(x_2) > f(x_1)$



Убывающая функция, $f(x_2) < f(x_1)$



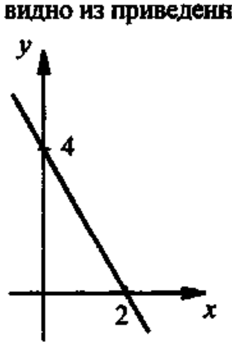
Немонотонная функция

Пример 2

Определим монотонность функции $f(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции – все значения x, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2, и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_1) = -2x_1 + 4$ и $f(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $f(x_2) - f(x_1) = (-2x_2 + 4) - (-2x_1 + 4) = -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 - x_1)$.

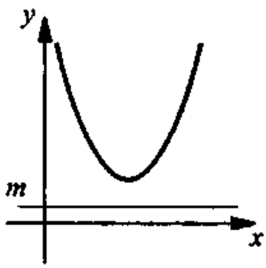
Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому получаем: $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции:



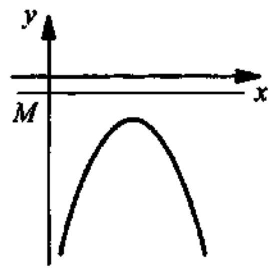
Функция во всей области определения $D(f)$ может быть немонотонной, но на множестве $X \subset D(f)$ функция может быть монотонной. Например, в примере 1 функция в целом немонотонна, но на промежутке $X = [3; +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $X = (-\infty; 3]$ – возрастает (докажите самостоятельно).

3. Ограниченность функции

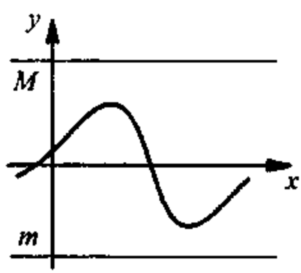
Следующее свойство – ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве $X \subset D(f)$, если все значения функции больше некоторого числа m (т. е. $f(x) = m$). Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве $X \subset D(f)$, если все значения функции меньше некоторого числа M (т. е. $f(x) < M$). Если функция ограничена снизу и сверху, то она называется **ограниченной**. На рисунке приведены графики ограниченных и неограниченной функций.



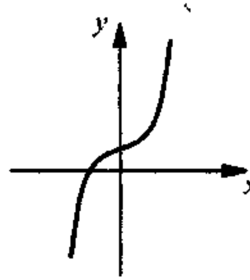
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограничена



Не ограничена

Для выяснения ограниченности функции очень часто используются алгебраические преобразования.

Пример 3

Докажем, что функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ ограничена сверху.

Выделим в функции $f(x) = -(x^2 - 6x + 8)$ полный квадрат разности. Для этого в скобках прибавим и вычтем единицу. Получаем: $f(x) = -(x^2 - 6x + 8 + 1 - 1) = -((x^2 - 6x + 9) - 1) = -((x-3)^2 - 1) = 1 - (x-3)^2$. Так как при всех значениях x величина $(x - 3)^2 \geq 0$, величина $-(x - 3)^2 \leq 0$, то $1 - (x - 3)^2 \leq 1$, т. е. $f(x) \leq 1$. Тогда (по определению) данная функция ограничена сверху (при этом число M, входящее в определение, равно 2). Из графика примера 1 наглядно видно, что при всех значениях x значения $f(x) < 2$. Заметим, что в качестве числа M можно выбрать любое число, большее 1 (например, $M = 3{,}84$).

4. Наименьшее и наибольшее значения функции

Число m называют **наименьшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Число M называют **наибольшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Пример 4

Найдем наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

В примере 3 было показано, что существует такое число $x_0 = 3$, что $f(x_0) = f(3) = 1$, т. е. $m = 1$. При этом для любого значения $x \in (-\infty; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \leq 1$, так как $f(x) \leq f(x_0)$. Тогда по определению функция $f(x)$ имеет наибольшее значение $f_{\text{наиб}} = 1$ и оно достигается при $x_0 = 3$. При этом было найдено наибольшее значение функции во всей области определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Разумеется, можно находить наименьшее и наибольшее значения функции не во всей области определения $D(f)$, а на некотором множестве X этой области.

Пример 5

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x + 4$ на отрезке $[-1; 3]$.

В примере 2 было показано, что данная функция убывает во всей области определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Поэтому наименьшее значение функции достигается на правом конце отрезка (т. е. в точке $x_1 = 3$), и оно равно $f_{\text{наим}} = f(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2$. Наибольшее значение функции достигается на левом конце отрезка (т. е. в точке $x_2 = -1$), и оно равно $f_{\text{наиб}} = f(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 6$.

5. Четность и нечетность функции

Предварительно введем еще одно понятие – симметричность области определения. Область определения называется **симметричной**, если функция определена и в точке x_0 и в точке $(-x_0)$ (т. е. в точке симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 6

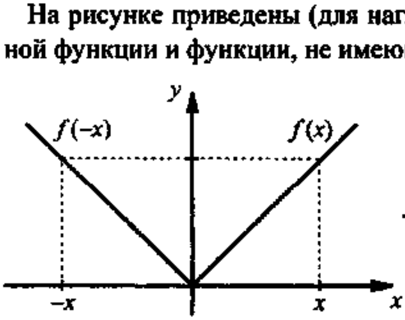
а) Областью определения функции $f(x)=\dfrac{2-3x}{x^2-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2-4=0$ (т. е. $x=\pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x=-1$, так и при $x=-(-1)=1$. И наоборот, эта функция не определена и при $x=-2$, и при $x=-(-2)=2$. Следовательно, область определения данной функции $D(f)=(-\infty;\,-2)\cup(-2;\,2)\cup(2;\,+\infty)$ симметричная.

б) Областью определения функции $f(x)=\dfrac{2-3x}{x-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x-4=0$ (т. е. $x=4$). Поэтому эта функция определена в точке $x=-4$, но не определена в симметричной точке $x=-(-4)=4$. Поэтому область определения данной функции $D(f)=(-\infty;\,4)\cup(4;\,+\infty)$ не является симметричной.

Понятие **четности функции** вводится **только** для функции **с симметричной областью определения**. Функция называется **четной**, если **при изменении знака аргумента значение функции не меняется**, т. е. $f(-x)=f(x)$. График четной функции всегда симметричен относительно оси ординат.

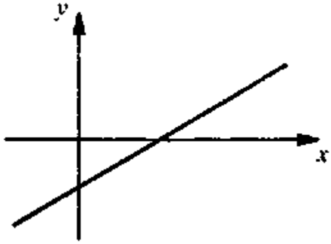
Функция называется **нечетной**, если **при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное**, т. е. $f(-x)=-f(x)$. График нечетной функции всегда симметричен относительно начала координат.

На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция,
$f(-x)=f(x)$

Нечетная функция,
$f(-x)=-f(x)$



Функция, не имеющая четности

Пример 7

Выясним четность функций:

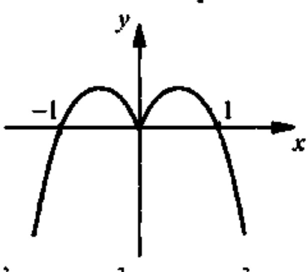
а) $f(x) = |x| - x^2$;

б) $f(x) = x - x^3$;

в) $f(x) = x - 2$.

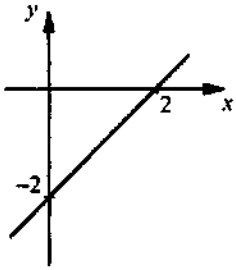
Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметричные. Для выяснения четности этих функций $f(x)$ надо найти значение $f(-x)$ и сравнить значения $f(x)$ и $f(-x)$.

а) $f(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| = |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что $f(-x)$ совпадает с данной функцией $f(x)$, т. е. $f(-x) = f(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $f(-x) = -x - (-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -f(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

в) $f(-x) = -x - 2$. Сравнивая значение $f(-x) = -x - 2$ со значением $f(x) = x - 2$, видим, что равенство $f(-x) = f(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-f(x) = -(x - 2) = 2 - x$. Сравнивая значение $f(-x) = -x - 2$ со значением $-f(x) = 2 - x$, видим, что равенство $f(-x) = -f(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.

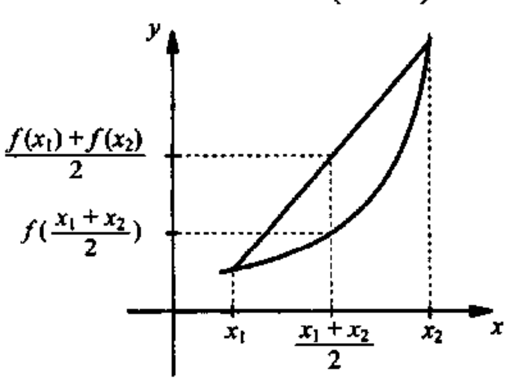


Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

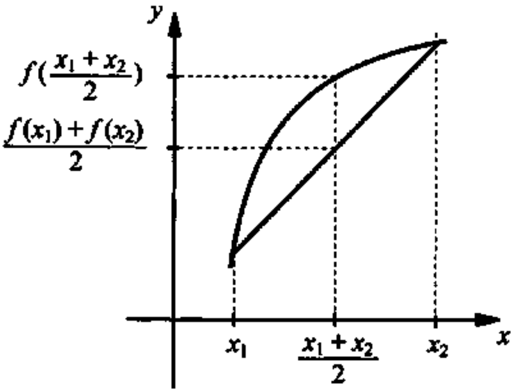
6. Выпуклость графика функции

Функция $y = f(x)$ **выпукла вниз** на промежутке X, если при соединении любых двух точек графика хордой часть графика располагается ниже этой хорды, т. е. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ (где $x_1 x_2 \in X$).

Функция $y = f(x)$ **выпукла вверх** на промежутке X, если при соединении любых двух точек графика хордой часть графика располагается выше этой хорды, т. е. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ (где $x_1 x_2 \in X$).



Выпукла вниз, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$



Выпукла вверх, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

Пример 8

Докажем, что функция $f(x) = x^2$ выпукла вниз в области определения.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Выберем произвольные значения x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) из этой области. Найдем: $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$ и $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{2}$. Покажем, что $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Действительно, получаем: $\frac{x_1^2+x_2^2}{2} > \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}$, или $2x_1^2+2x_2^2 > x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, или $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 > 0$, или $(x_1-x_2)^2 > 0$. Так как $x_1 \neq x_2$, то имеем верное неравенство.

Мы доказали, что $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Тогда по определению функция $f(x)$ выпукла вниз.

7. Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ **непрерывна** на промежутке X, если **при малом изменении аргумента функция меняется незначительно**, т. е. при $x_2 - x_1 \to 0$ разность $f(x_2) - f(x_1) \to 0$. При этом график непрерывной функции сплошной и не имеет разрывов.

Пример 9

Покажем, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна в области определения.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Выберем произвольные значения x_1 и x_2 такие, что $x_2 \to x_1$, т. е. $x_2 - x_1 \to 0$. Найдем разность $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$. Так как $x_2 - x_1 \to 0$, то и разность $f(x_2) - f(x_1) \to 0$. Поэтому функция $f(x)$ по определению является непрерывной.

Пример 10

Докажем, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } -1 \le x < 1, \\ 2, \text{ если } x \ge 1, \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 1$.

Область определения функции $D(f) = [-1; +\infty)$. Из этой области выберем значения $x_2 = 1$ и x_1 (при этом $x_1 < 1$ и $x_1 \to 1$, т. е. $x_2 - x_1 \to 0$). Найдем разность $f(x_2) - f(x_1) = 2 - x_1^2$. Оценим эту разность. Так как $x_1 < 1$, то справедливо неравенство $0 \le x_1^2 < 1$. Все части этого неравенства умножим на отрицательное число (–1). При этом знаки неравенства меняются на противоположные: $0 \ge -x_1^2 > -1$. Ко всем частям этого неравенства прибавим число 2 и получим: $2 \ge 2 - x_1^2 > 1$, т. е. $1 < f(x_2) - f(x_1) \le 2$. Видно, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ не стремится к нулю, несмотря на то что разность $x_2 - x_1 \to 0$. Поэтому в точке $x = 1$ функция имеет разрыв. В этом легко убедиться, построив график функции. Предлагаем самостоятельно доказать, что в остальных точках области определения функция является непрерывной.

IV. Контрольные вопросы

1. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Определение возрастающей (убывающей) функции.
3. Функция, ограниченная снизу (сверху).
4. Наименьшее и наибольшее значения функции.
5. Четность и нечетность функции.
6. Выпуклость графика функции.
7. Непрерывность функции.

V. Задание на уроках

§ 10, № 2 (в); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 13 (в, г); 19 (а); 22 (в, г); 28 (а); § 11, № 1; 3 (а); 4 (б); 9 (а, б); 12 (а); 14; 21 (а, в); 27.

VI. Задание на дом

§ 10, № 3 (г); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 13 (а, б); 19 (б); 22 (а, б); 28 (г); § 11, № 2; 3 (г); 4 (в); 9 (в, г); 12 (б); 15; 21 (б, г); 28.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 40–43. Свойства и графики элементарных функций

Цель: обсудить свойства и графики некоторых функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Функция, возрастающая на промежутке.
2. Понятие нечетной функции и ее свойство.
3. Найдите область определения, область значений, монотонность и четность функции $y = \frac{3}{x}$ (с обоснованием). Постройте график функции.

Вариант 2

1. Функция, убывающая на промежутке.
2. Понятие четной функции и ее свойство.
3. Найдите область определения, область значений, монотонность и четность функции $y = -\frac{2}{x}$ (с обоснованием). Постройте график функции.

III. Изучение нового материала

Теперь необходимо вспомнить основные свойства и графики некоторых ранее изученных функций (свойства надо представлять, но запоминать не стоит).

1. Линейная функция $y = kx + m$

1. Область определения – множество всех чисел $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Графиком функции является прямая линия.

3. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = -\dfrac{m}{k}$ (при $k \neq 0$) и параллелен оси абсцисс при $k = 0$. График функции пересекает ось ординат в точке $y = m$.

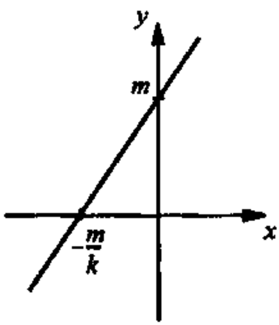
4. Функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$ и постоянна при $k = 0$.

5. Функция неограниченна при $k \neq 0$ и ограничена при $k = 0$.

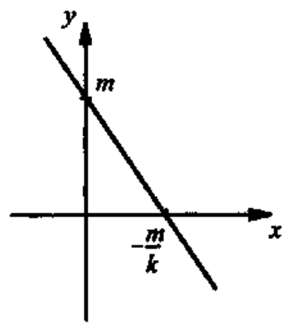
6. Функция определенной четности не имеет при $m \neq 0$, нечетная при $m = 0$ и четная при $k = 0$.

7. Область значений – множество всех чисел при $k \neq 0$ и $y = m$ при $k = 0$.

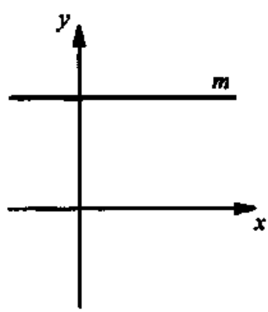
8. При $m = 0$ функцию $y = kx$ называют прямой пропорциональностью.



$k > 0$



$k < 0$



$k = 0$

Пример 1

Найдем условие, при котором линейная функция $y = kx + m$ является: а) нечетной; б) четной.

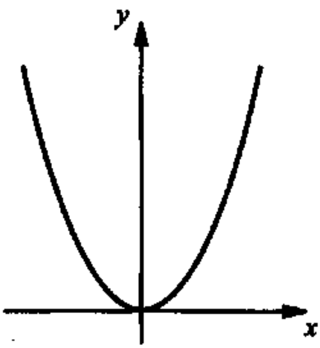
Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$ – симметричная. Найдем значение $y(-x) = k \cdot (-x) + m = -kx + m$.

а) Если функция нечетная, то $y(-x) = -y(x)$. Получаем: $-kx + m = -(kx + m)$, или $m = -m$, или $2m = 0$, откуда $m = 0$.

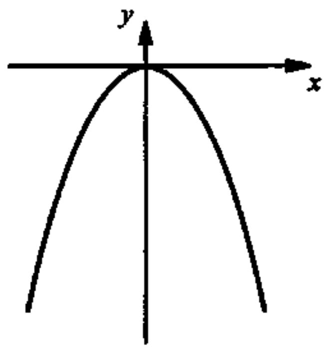
б) Если функция четная, то $y(-x) = y(x)$. Получаем: $-kx + m = kx + m$ или $0 = 2kx$, откуда $k = 0$ (так как x – любое число, не равное нулю).

2. Квадратичная функция $y = kx^2$ ($k \neq 0$)

1. Область определения – множество всех чисел $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Графиком функции является парабола.
3. График функции проходит через начало координат.
4. При $k > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. При $k < 0$ функция убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$.
5. Функция ограничена снизу при $k > 0$ и сверху при $k < 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$ при $k > 0$ и $E(f) = (-\infty; 0]$ при $k < 0$.
8. Функция выпукла вниз $k > 0$ и вверх при $k < 0$.



$k > 0$



$k < 0$

Пример 2

Докажем ограниченность квадратичной функции $y = x^2$.

Очевидно, что при всех значениях x величина $y = x^2$ принимает только неотрицательные значения, т. е. $y \geq 0$. По определению функция ограничена снизу, т. е. $y > m$ (где m может быть любым отрицательным числом: $m = -103$, $m = -5$, $m = -0{,}1$).

3. Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$

1. Область определения – множество всех чисел, кроме нуля.
2. Графиком функции является гипербола.
3. График функций осей координат не пересекает.

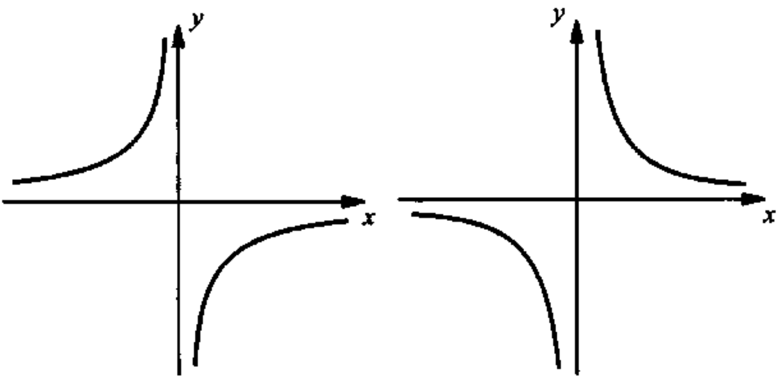
4. Функция возрастает при $k < 0$ и убывает при $k > 0$ в области определения.

5. Функция неограниченна.

6. Функция нечетна.

7. Область значений – множество всех чисел, кроме нуля.

8. При $k > 0$ функция выпукла вверх при $x < 0$ и вниз, при $x > 0$. При $k < 0$ функция выпукла вниз при $x < 0$ и вверх, при $x > 0$.



$k < 0$ $\qquad\qquad$ $k > 0$

Пример 3

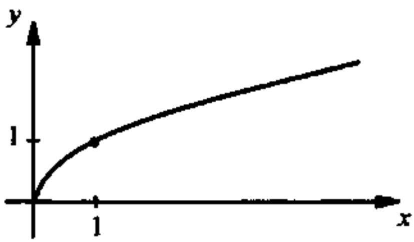
Выясним монотонность обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$.

Область определения данной функции $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 (где $x_2 > x_1$) из области определения функции. Найдем значения функции в этих точках $f(x_1) = \frac{k}{x_1}$ и $f(x_2) = \frac{k}{x_2}$ и сравним их. Для этого рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ отрицательна. Поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ противоположен знаку дроби $\frac{k}{x_1 x_2}$.

Функция $y = \frac{k}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Рассмотрим два промежутка области определения. При $x_1, x_2 \in (-\infty;\ 0)$ и при $x_1, x_2 \in (0;\ +\infty)$ произведение $x_1 x_2$ положительно. Поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, при $k < 0$ величина $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ и функция возрастает; при $k > 0$ величина $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$ и функция убывает.

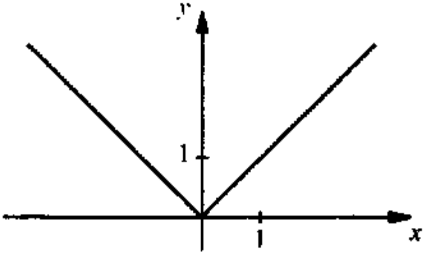
4. Функция $y = \sqrt{x}$

1. Область определения – множество неотрицательных чисел $D(f) = [0; +\infty)$.
2. График специального названия не имеет.
3. График выходит из начала координат.
4. Функция возрастает.
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция определенной четности не имеет.
7. Область значений – множество неотрицательных чисел.
8. Функция выпукла вверх.



5. Функция $y = |x|$

1. Область определения – множество всех чисел $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. График специального названия не имеет.
3. График проходит через начало координат.
4. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений – множество неотрицательных чисел.



6. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения – множество всех чисел $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Графиком функции является парабола с вершиной в точке (x_0, y_0), где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз. Прямая $x = x_0$ – ось симметрии параболы.

3. График функции пересекает ось ординат в точке $y = C$. При $D = b^2 - 4ac > 0$ график пересекает ось абсцисс в точках $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, при $D = 0$ – график касается оси абсцисс в точке $x = -\dfrac{b}{2a}$.

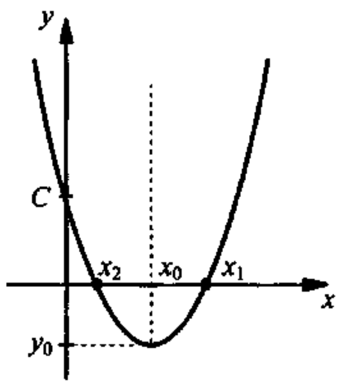
4. При $a > 0$ функция убывает на луче $(-\infty; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$. При $a < 0$ функция убывает на луче $[x_0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$.

5. Функция ограничена снизу при $a > 0$ (т. е. $y \geq y_0$) и сверху при $a < 0$ (т. е. $y \leq y_0$).

6. Функция определенной четности не имеет.

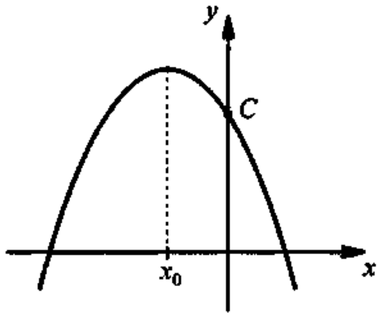
7. Область значений $E(f) = [y_0; +\infty)$ при $a > 0$ и $E(f) = (-\infty; y_0]$ при $a < 0$.

8. Функция выпукла вниз при $a > 0$ и вверх – при $a < 0$.



Пример 4

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определим знаки коэффициентов a, b и c.



1) Так как ветви параболы направлены вниз, то коэффициент $a < 0$.

2) Абсцисса x_0 вершины параболы отрицательна (как видно из рисунка). Получаем неравенство: $-\frac{b}{2a} < 0$. Умножим обе его части на отрицательное число $2a$. При этом знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-b > 0$. Вновь умножим обе части этого неравенства на отрицательное число -1. Опять знак неравенства меняется на противоположный. Имеем: $b < 0$. Значит, коэффициент $b < 0$.

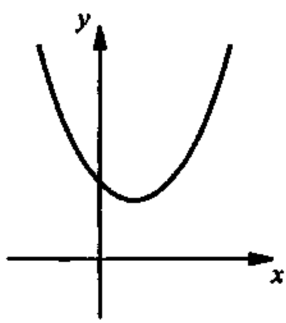
3) При $x = 0$ значение функции $y(x)$ равно $y(0) = c$. Из рисунка видно, что $c > 0$.

Итак, были определены знаки коэффициентов: $a < 0$, $b < 0$ и $c > 0$.

Пример 5

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определим знак выражения:

а) $a + b + c$; б) $4a - 2b + c$.



Видно, что при всех значениях x функция $y(x)$ принимает *только положительные значения*. Осталось понять смысл данных выражений. Найдем значение функции $y = ax^2 + bx + c$:

а) при $x = 1$ $y(1) = a + b + c$;

б) при $x = -2$ $y(-2) = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 4a - 2b + c$.

Напомним, что при всех значениях x (в том числе и при $x = 1$, и при $x = -2$) значения функции положительны. Поэтому $a + b + c > 0$ и $4a - 2b + c > 0$.

Пример 6

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $A(-1;\ 10)$ и имеет вершину в точке $B(1;\ -2)$. Напишем уравнение параболы.

Запишем условия прохождения параболы через точки A и B. Кроме того, учтем, что точка B – вершина параболы. Запишем выражение для абсциссы вершины. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 10, \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -2, \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - b + c = 10, \\ a + b + c = -2, \\ b = -2a. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и получим $-2b = 12$, откуда $b = -6$. Тогда из третьего уравнения имеем $-6 = -2a$, откуда $a = 3$. Подставим значения $a = 3$ и $b = -6$ в первое уравнение и получим: $3 + 6 + c = 10$, откуда $c = 1$.

Таким образом, напишем уравнение данной параболы $y = 3x^2 - 6x + 1$.

Пример 7

Найдем значение параметра k, при котором прямая $y = 2x - 5$ касается параболы $y = x^2 + kx + 4$. Найдем координаты точки касания.

Если графики двух функций пересекаются в точке с координатами $(x_0;\ y_0)$, то величины x_0 и y_0 являются решением системы уравнений $\begin{cases} y = x^2 + kx + 4, \\ y = 2x - 5. \end{cases}$ Если $(x_0;\ y_0)$ – точка касания двух графиков, то приведенная система имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$.

Приравняем правые части уравнений системы: $x^2 + kx + 4 = 2x - 5$ и получим квадратное уравнение с параметром $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$. Это уравнение (а следовательно, и приведенная система) имеет единственное решение, если дискриминант $D = (k - 2)^2 - 4\cdot 9 = k^2 - 4k - 32 = 0$. Корни этого уравнения $k_1 = -4$ и $k_2 = 8$.

а) При $k = -4$ уравнение $x^2+(k-2)x+9=0$ имеет вид $x^2 - 6x + 9 = 0$ или $(x - 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = 3$, тогда $y = 2x - 5 = 2\cdot3 - 5 = 1$. Итак, при $k = -4$ данные парабола и прямая касаются в точке (3; 1).

б) При $k = 8$ уравнение $x^2+(k-2)x+9=0$ имеет вид $x^2 + 6x + 9 = 0$ или $(x + 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = -3$, тогда $y = 2x - 5 = 2\cdot(-3) - 5 = -11$. Итак, при $k = 8$ данные парабола и прямая касаются в точке (–3; –11).

IV. Контрольные вопросы

1. Свойства и график линейной функции $y = kx + m$.
2. Свойства и график обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$.
3. Свойства и график квадратичной функции $y = kx^2$.
4. Свойства и график функции $y=\sqrt{x}$.
5. Свойства и график функции $y = |x|$.
6. Свойства и график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$.

V. Задание на уроках

§ 10, № 14; 16; 24 (а, г); 26; § 11, № 31 (а, б); 32 (в, г); 33 (а, б); 34 (в, г).

VI. Задание на дом

§ 10, № 15; 17; 24 (б, в); 27; § 11, № 31 (в, г); 32 (а, б); 33 (в, г); 34 (а, б).

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции:

а) $y=x+|x-2|$; б) $=2x-|x-3|$;

в) $y=|x-1|+|x+2|$; г) $y=|x-1|-|x+2|$;

д) $y=\frac{x^2-9}{3-x}+2x+1$; е) $y=\frac{x^3-2x^2}{x-2}$;

ж) $\frac{y+x-1}{x+2}=1$; з) $\frac{2y-x-2}{y+x}=1$.

2. Постройте множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|y| = x-3$; б) $y+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}$;

в) $(y-x)\left(y-\frac{1}{x}\right)=0$; г) $|y-3|=1$;

д) $|y-2x|=4$;
е) $|x|+|y|=2$;
ж) $y \geq x+1$;
з) $y<2x-4$;
и) $|y-1| \leq 2$;
к) $|y|<2x+2$;
л) $|x|+2|y| \geq 2$.

3. Напишите уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$, которая проходит через точку A и имеет вершину в точке B:

а) $A(0; 1)$ и $B(1; -2)$;
б) $A(0; -5)$ и $B(3; 4)$;
в) $A(1; 2)$ и $B(-1; -10)$;
г) $A(-1; 9)$ и $B(-2; 11)$.

Ответы: а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$; в) $y = 3x^2 + 6x - 7$; г) $y = -2x^2 - 8x + 3$.

4. Найдите значение параметра k, при котором прямая y_1 касается параболы y_2. Найдите координаты точки касания.

а) $y_1 = x - 3$ и $y_2 = x^2 + kx + 1$;
б) $y_1 = x + 5$ и $y_2 = -x^2 + (k-2)x + 4$;
в) $y_1 = -2kx + 1$ и $y_2 = 2x^2 - 10x + 19$;
г) $y_1 = (1-k)x - 2$ и $y_2 = 3x^2 + (2k+1)x + 1$.

Ответы: а) при $k = -3$ $(2; -1)$, при $k = 5$ $(-2; -5)$; б) при $k = 1$ $(-1; 4)$, при $k = 5$ $(1; 6)$; в) при $k = -1$ $(3; 7)$, при $k = 11$ $(-3; 67)$; г) при $k = -2$ $(1; 1)$, при $k = 2$ $(-1; -1)$.

5. Напишите уравнение параболы $y=x^2+px+q$, если вершина ее находится в точке A:

а) $A(1; -4)$; б) $A(-1; 5)$; в) $A(2; -3)$; г) $A(-4; -1)$.

Ответы: а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = x^2 + 2x + 6$; в) $y = x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 - 8x - 17$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 44–45. Функция $y = x^n\,(n \in N)$, ее свойства и графики

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = x^n\,(n \in N)$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

б) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

в) $y = -2x^2 + \frac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-1; 0)$, $B(0; 3)$ и $C(2; -3)$. Найдите коэффициенты a, b, c.

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 - x + 2$;

б) $y = |-x^2 - x + 2|$;

в) $y = 2x^2 - \frac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-1; 4)$, $B(0; 1)$ и $C(2; 7)$. Найдите коэффициенты a, b, c.

III. Изучение нового материала

Функцию $y = x^n$ (где x – независимая переменная, n – натуральное число) называют *степенной функцией* с натуральным показателем. Частные случаи такой функции для $n = 1, 2$ (т. е. $y = x$, $y = x^2$) мы уже рассматривали. Известны свойства и графики этих функций. Теперь необходимо обсудить свойства и график степенной функции при любом натуральном n. Эти характеристики существенно *различаются в* зависимости от четности или нечетности числа n.

Приведем **свойства** функции $y = x^n$ **при четном** n (они аналогичны свойствам функции $y = x^2$).

1) Область определения функции – промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3) Если $x \neq 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и второй координатных четвертях.

4) Функция четная: $y(-x) = y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно оси ординат.

5) Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.

6) Функция ограничена снизу: $y \geq 0$.

7) Область значений функции – промежуток $[0; +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. a.

Рассмотрим также **свойства функции** $y = x^n$ **при нечетном** n (они аналогичны свойствам функции $y = x^3$).

1) Область определения функции – промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3) Если $x < 0$, то $y < 0$, и если $x > 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.

4) Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно начала координат.

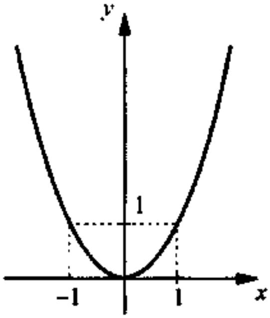
5) Функция возрастает на всей области определения.

6) Функция не ограничена.

7) Область значений функции – промежуток $(-\infty; +\infty)$.

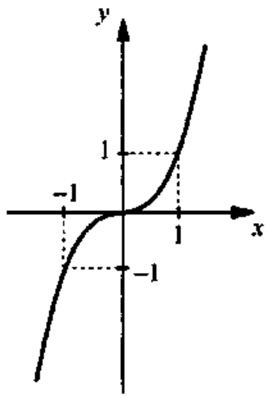
8) График функции представлен на рис. *б*.

а)



n – четное

б)



n – нечетное

Пример 1

Дана функция $f(x) = x^3$. Вычислим выражение $f(3) - 4f(2) + 7f(1)$.

Чтобы найти значение функции при данном значении аргумента, надо подставить этот аргумент в формулу, задающую функцию, и выполнить действия. Получаем: $f(3) - 4f(2) + 7f(1) = 3^3 - 4 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3 = 27 - 4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 27 - 32 + 7 = 2$.

Пример 2

Сравним числа: а) $(-3{,}2)^4$ и $(-1{,}8)^4$; б) $2{,}4^4$ и $2{,}7^4$; в) $(-6{,}5)^3$ и $(-4{,}8)^3$; г) $(-6{,}5)^3$ и $(-4{,}8)^3$; д) $2{,}8^3$ и $4{,}1^3$.

При решении подобных задач учитывают монотонность соответствующей функции. $f(x) = x^4$. Эта функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Так как $-3{,}2 < -1{,}8$, то $f(-3{,}2) > f(-1{,}8)$ или $(-3{,}2)^4 > (-1{,}8)^4$.

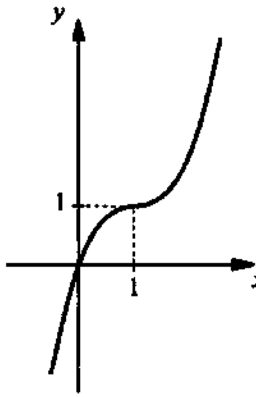
На промежутке $[0; +\infty)$ эта функция возрастает. Так как $2,4 < 2,7$, то и $f(2,4) < f(2,7)$ или $2,4^4 < 2,7^4$.

Теперь рассмотрим функцию $g(x) = x^3$. Такая функция возрастает на всей области определения. Так как $-6,5 < -4,8$ и $2,8 < 4,1$, то и $g(-6,5) < g(-4,8)$ и $g(2,8) < g(4,1)$ или $(-6,5)^3 < (-4,8)^3$ и $2,8^3 < 4^3$.

Пример 3

Построим график функции $y = (x - 1)^3 + 1$.

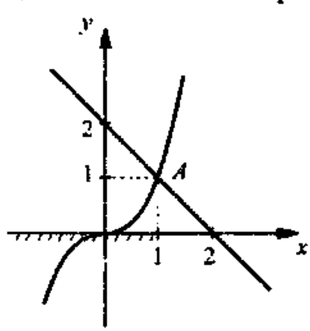
Учтем ранее изученные способы преобразования графиков. График функции $y = (x - 1)^3 + 1$ получается сдвигом графика функции $y = x^3$ на одну единицу вправо и на одну единицу вверх.



Пример 4

Решим неравенство $x^3 \le 2 - x$.

Решим данное неравенство графически. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2 - x$. Эти графики пересекаются в единственной точке $A(1; 1)$. По условию задачи надо найти те значения x, при которых первый график расположен не выше второго графика. Из рисунка видно, что условие задачи выполняется на промежутке $(-\infty; 1]$.



IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^n$ для четных n.

2. Приведите свойства и график степенной функции для нечетных n.

V. Задание на уроках

§ 12, № 1 (а, г); 2; 5 (б); 13 (а, в); 15 (а); 17 (а, б); 18 (в, г); 20 (а); 22; 24 (а, б); 25 (в, г); 27; 29; 32 (а); 33 (а, г); 34.

VI. Задание на дом

§ 12, № 1 (б, в); 3; 5 (в); 13 (б, г); 15 (г); 17 (в, г); 18 (а, б); 20 (г); 23; 24 (в, г); 25 (а, б); 28; 30; 32 (б); 33 (б); 35.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 46–47. Функции $y = x^{-n}$ $(n \in N)$, их свойства и графики

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = x^{-n}$ $(n \in N)$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2(x-1)^4$. Вычислите $2f(0) - 3f(1) + 4f(2)$.
2. Сравните числа: а) $(-7{,}2)^6$ и $(6{,}1)^6$; б) $(-4{,}8)^3$ и $2{,}7^3$.
3. Постройте график функции $y = (x+1)^4 - 2$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = -2(x+1)^4$. Вычислите $6f(-1) + 4f(0) - 3f(1)$.
2. Сравните числа: а) $(-9{,}3)^4$ и $(7{,}3)^4$; б) $(-7{,}8)^5$ и $4{,}7^5$.
3. Постройте график функции $y = (x+1)^3 - 2$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим теперь функции $y = x^{-n}$ $(n \in N)$. Такие функции называют **степенными функциями с отрицательным целыми пока-**

зателями. По определению степени с отрицательным показателем рассматриваемые функции можно записывать и в виде $y = \frac{1}{x^n}$. При $n = 1$ функция $y = \frac{1}{x}$ была изучена. Ее графиком является гипербола. Также необходимо обсудить свойства и график степенной функции при любом натуральном n. Эти характеристики существенно **различаются в зависимости от четности или нечетности числа n.**

Приведем **свойства** функции $y = x^{-n}$ **при четном n.**

1) Область определения функции – все значения x, кроме нуля, т. е. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2) График не пересекает осей координат. При этом ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции, ось ординат – *вертикальной асимптотой* графика (напомним, что асимптотой графика функции называют прямую, к которой при определенных условиях неограниченно близко приближается график).

3) При всех x из области определения $y > 0$. Поэтому график расположен в первой и второй координатных четвертях.

4) Функция четная: $y(-x) = y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

5) Функция возрастает в промежутке $(-\infty;\ 0)$ и убывает в промежутке $(0;\ +\infty)$. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

6) Функция ограничена снизу: $y > 0$.

7) Область значений функции $E(f) = (0;\ +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. *а*.

Рассмотрим также **свойства** функции $y = x^{-n}$ **при нечетном n** (они аналогичны свойствам функции $y = \frac{1}{x}$).

1) Область определения функции – все значения x, кроме нуля, т. е. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2) График не пересекает осей координат. При этом ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции, ось ординат – *вертикальной асимптотой.*

3) При $x > 0$ значения $y > 0$, при $x < 0$ – $y < 0$. Поэтому график расположен в первой и третьей координатных четвертях.

4) Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

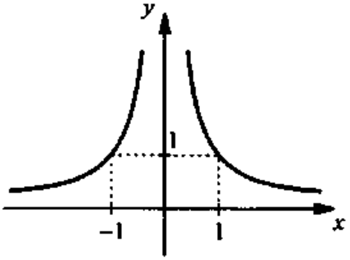
5) Функция убывает в области определения. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

6) Функция не ограничена.

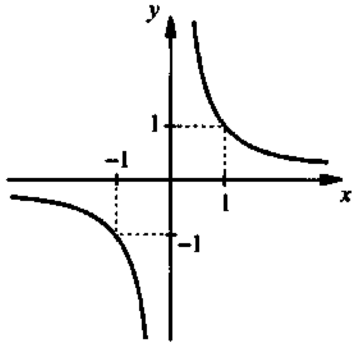
7) Область значений функции $E(f) \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. *б*.

а) *б)*



n – четное



n – нечетное

Пример 1

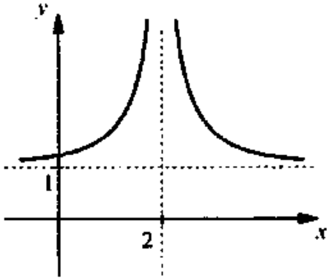
Сравним числа $0{,}17^{-3}$ и $0{,}19^{-3}$.

Сравниваются два значения степенной функции $y = x^{-3}$ при $x = 0{,}17$ и $x = 0{,}19$. При $n = 3$ функция убывающая. Поэтому $0{,}17^{-3} > 0{,}19^{-3}$.

Пример 2

Построим график функции $y = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$.

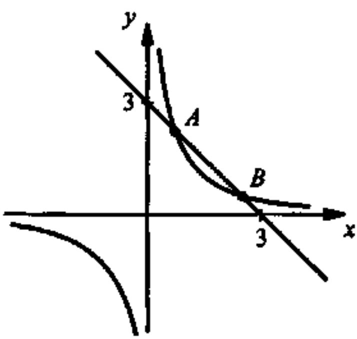
Такой график получается параллельным переносом графика $y = \dfrac{1}{x^2}$ на две единицы вправо и на одну единицу вверх. Поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. При этом график симметричен относительно прямой $x = 2$.



Пример 3

Определим число решений системы уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^3}, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Построим графики функций $y = \dfrac{1}{x^3}$ и $y = 3 - x$. Видно, что графики функций пересекаются в двух точках: A и B. Поэтому данная система уравнений имеет два решения.



Пример 4

Даны функции $f(x) = x^{-3}$ и $g(x) = x^4$. Докажем, что выполняется равенство $(f(x^2))^2 = (g(x))^{-3}$.

Сначала найдем $f(x^2) = (x^2)^{-3} = x^{-6}$ и $(f(x^2))^2 = (x^{-6})^2 = x^{-12}$. Также найдем $(g(x))^{-3} = (x^4)^{-3} = x^{-12}$. Видно, что данное равенство действительно выполняется.

IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^{-n}$ для четных n.

2. Приведите свойства и график степенной функции $y = x^{-n}$ для нечетных n.

V. Задание на уроках

§ 13, № 2 (а, б); 4 (а, в); 5; 7; 11 (б); 12; 19; 21 (а); 22 (а, б); 24.

VI. Задание на дом

§ 13, № 2 (в, г); 4 (б, г); 6; 8; 11 (г); 13; 20; 21 (б); 22 (в, г); 25.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 48–49. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ $(n \in N,\ n \geq 2)$, ее свойства и график (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y=\sqrt[n]{x}$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y=x^{-n}$ для четных n.

2. Постройте график функции $y=\dfrac{1}{(x+2)^3}-3$.

Вариант 2

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y=x^{-n}$ для нечетных n.

2. Постройте график функции $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}+3$.

III. Изучение нового материала

В учебнике рассматривается только функция $y=\sqrt[3]{x}$. На наш взгляд, целесообразно расширить задачу: изучить функцию $y=\sqrt[n]{x}$ $(n \in N,\ n \geq 2)$ и привести ее график. При $n = 3$ тем самым будет рассмотрен материал учебника.

Вы уже знаете, что понятие квадратного корня возникло при решении простейшего квадратного уравнения $x^2 = a$. При этом квадратным корнем из числа a называют такое число, квадрат которого равен a. Разумеется, кроме уравнения $x^2 = a$, необходимо решать уравнения $x^3 = a, x^4 = a, \ldots, x^n = a$. Поэтому надо ввести понятие корня любой натуральной степени n (аналогичное понятию квадратного корня).

Корнем n-й степени из числа a называют такое **число, n-я степень которого равна a**. Этот корень обозначают символом $\sqrt[n]{a}$. Причем n называют показателем корня, a – подкоренным выражением.

Пример 1

а) $\sqrt[4]{81}=3$, так как $3^4=81$;

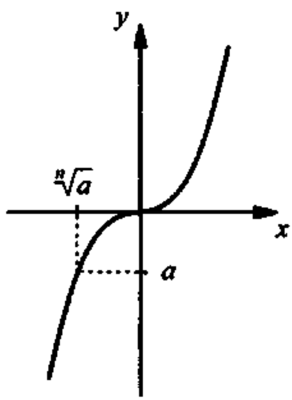
б) $\sqrt[3]{-8}=-2$, так как $(-2)^3=-8$;

в) $\sqrt[5]{0}=0$, так как $0^5=0$.

Принято корень **второй степени** называть **квадратным корнем**, корень **третьей степени – кубическим корнем.**

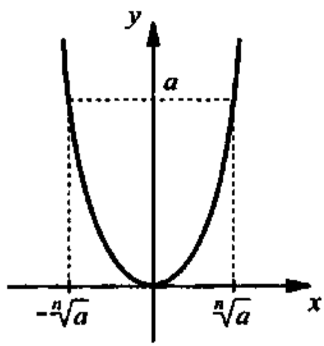
Теперь необходимо уточнить понятие корня. Сначала рассмотрим степенную функцию $y=x^n$ с нечетным показателем n. Из рис. *а* видно, что для любого значения a уравнение $x^n=a$ имеет единственное решение $x=\sqrt[n]{a}$. Обратимся теперь к степенной функции $y=x^n$ с четным показателем n (рис. *б*). Тогда уравнение $x^n=a$ при $a<0$ решений не имеет, при $a=0$ имеет единственное решение $x=0$, при $a>0$ имеет два противоположных по знаку решения. В этом случае положительное решение обозначают символом $\sqrt[n]{a}$.

а)



n – нечетное

б)



n – четное

Пример 2

Рассмотрим уравнение $x^4=81$. Очевидно, что такое уравнение имеет два решения $x_1=-3$ и $x_2=3$, так как при подстановке этих чисел в уравнение получаем верное равенство. Учитывая, что $\sqrt[4]{81}=3$, такие решения можно записать в виде $x_1=-\sqrt[4]{81}=-3$ и $x_2=\sqrt[4]{81}=3$.

Таким образом, выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл при четном и нечетном n и значение этого выражения является **неотрицательным** числом. Его называют **арифметическим корнем *n*-й**

степени из a. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень из положительного числа.

Пример 3

Получаем $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64}$, так как $\sqrt[3]{-64} = -4$ и $-\sqrt[3]{64} = -4$.

Ранее изученные *свойства* квадратного корня можно обобщить на случай корня n-й степени:

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

5) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$.

В равенствах 1–5 числа m и n натуральные; в равенствах 1–4 числа a, $b \geq 0$, и в равенстве 4 число $b \neq 0$.

Пример 4

Используя приведенные свойства, вычислим:

а) $(\sqrt[7]{3})^7 = 3$;

б) $\sqrt[5]{3^{10}} = (\sqrt[5]{3})^{10} = (\sqrt[5]{3})^{5 \cdot 2} = ((\sqrt[5]{3})^5)^2 = 3^2 = 9$;

в) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[5]{2^5} = 2$;

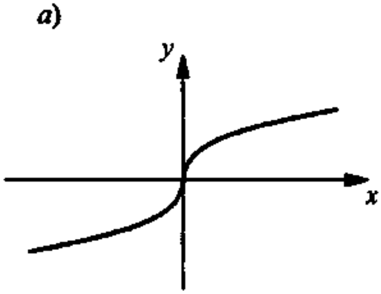
г) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{108}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{108}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$;

д) $\sqrt[6]{(-7)^6} = |-7| = 7$;

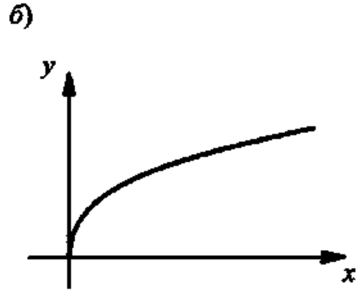
е) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{4}{3}$;

ж) $\sqrt[3]{\sqrt{31}-2} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{31}} = \sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(2+\sqrt{31})} = \sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(\sqrt{31}+2)} =$
$= \sqrt[3]{(\sqrt{31})^2 - 2^2} = \sqrt[3]{31-4} = \sqrt[3]{27} = 3$.

В заключение приведем графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных (a) и четных ($б$) значений n.



n – четное



n – нечетное

IV. Контрольные вопросы

1. Определение корня n-й степени.
2. Основные свойства корня n-й степени.
3. Графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных и четных значений n.

V. Задание на уроках

§ 14, № 1 (а, б); 2; 4; 7 (в, г); 8 (а, в); 10 (б); 11 (а, в); 13 (б); 15 (а, б); 19 (а); 26; 27 (а, б); 28 (а).

VI. Задание на дом

§ 14, № 1 (в, г); 3; 5; 7 (а, б); 8 (б, г); 10 (г); 11 (б, г); 13 (г); 15 (в, г); 19 (б); 25; 27 (в, г); 28 (б).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 50–51. Дробно-линейная функция и ее график (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть свойства дробно-линейной функции и ее график.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение корня n-й степени из числа a.

2. Найдите значение выражения $10\sqrt[4]{\frac{16}{625}}-(2\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt{7})^0$.

3. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x+1}-2$.

Вариант 2

1. Определение арифметического корня n-й степени из числа a.

2. Найдите значение выражения $10\sqrt[3]{\frac{8}{125}}+(2\sqrt[4]{3})^4-(3\sqrt{5})^0$.

3. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x-1}+2$.

III. Изучение нового материала

Ранее были рассмотрены свойства и график функции $y=\frac{k}{x}$ при разных k. Графиком функции является **гипербола**. Особенностью этого графика является наличие вертикальной и горизонтальной асимптот. **Асимптотой** графика функции $y(x)$ называют прямую, к которой неограниченно близко приближается (при определенных условиях) график функции $y(x)$. По внешнему виду асимптоты разделяются на вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Значения функции $y=\frac{k}{x}$ при малых значениях $x (x \to 0)$ неограниченно возрастают ($y \to \infty$) или убывают ($y \to -\infty$). Поэтому при малых x график функции неограниченно близко приближается к оси ординат (прямой $x = 0$). Такая прямая является **вертикальной асимптотой** графика функции $y=\frac{k}{x}$.

При больших значениях $|x|$ ($|x| \to \infty$) значения функции стремятся к нулю ($y \to 0$). Поэтому при больших значениях $|x|$ график функции $y=\frac{k}{x}$ неограниченно близко приближается к оси абсцисс (прямой $y = 0$). Такая прямая является **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=\frac{k}{x}$.

Теперь обобщим функцию $y=\frac{k}{x}$ и рассмотрим функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где x – переменная; a, b, c, d – некоторые числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. Такую функцию называют **дробно-линейной**, т. е. формула, задающая функцию, представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой линейные функции. Очевидно, что при $a = d = 0$ и $\frac{b}{c} = k$ дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ является обратно пропорциональной зависимостью $y = \frac{k}{x}$.

Пример 1

Следующие функции являются дробно-линейными:

1) $y = \frac{3x+1}{2x-5}$, $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -5$;

2) $y = \frac{7}{5x-3}$, $a = 0$, $b = 7$, $c = 5$, $d = -3$;

3) $y = \frac{4x}{3x+2}$, $a = 4$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 2$;

4) $y = \frac{2x-7}{5x}$, $a = 2$, $b = -7$, $c = 5$, $d = 0$.

Заметим, что приведенные ограничения важны. При $c = 0$ дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ является линейной: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, при $ad - bc = 0$: константой $y = \frac{b}{d}$.

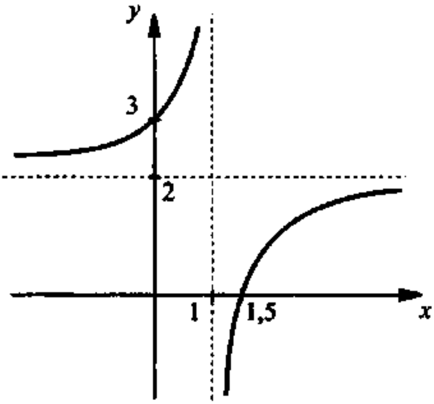
Можно показать, что графиком дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ является **гипербола**, которую можно получить с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей графика $y = \frac{k}{x}$. Для этого в дробно-линейной функции надо **выделить целую часть**, т. е. представить ее в виде $y = n + \frac{k}{x-m}$ (где n, k, m – некоторые числа).

Пример 2

Построим график функции $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

В дроби $\frac{2x-3}{x-1}$ выделим целую часть и представим функцию в виде $y = \frac{2x-2-1}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$. Здесь $n = 2$, $k = -1$, $m = 1$.

Таким образом, надо построить график функции $y = 2 - \frac{1}{x-1}$.

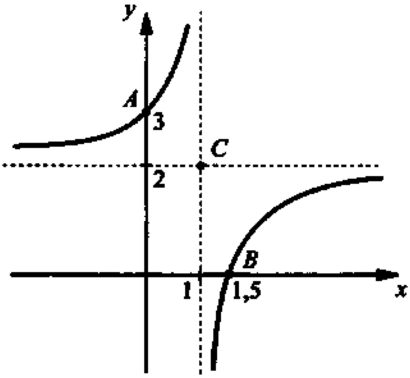


Он получается смещением гиперболы $y=-\frac{1}{x}$ на одну единицу вправо и на две единицы вверх. График данной функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 2$.

Пример 3

Рассмотрим еще один способ построения графика дробно-линейной функции $y=\frac{2x-3}{x-1}$.

Для этого найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Положим $x = 0$ и определим точку пересечения с осью ординат: $y=\frac{-3}{-1}=3$. Теперь положим $y = 0$, получим уравнение: $0=\frac{2x-3}{x-1}$ или $0 = 2x - 3$ – и найдем точку пересечения с осью абсцисс $x = 1,5$. Построим точки $A(0; 3)$ и $B(1,5; 0)$.



Определим асимптоты графика функции. Вертикальную асимптоту находим из условия, что функция не определена, т. е. $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$. Поведение функции при больших значениях $|x|$ ($|x| \to \infty$) определяет горизонтальную асимптоту. При таких значениях x в числителе дроби $\frac{2x-3}{x-1}$ можно пренебречь числом (–3), в знаменателе – числом (–1). Тогда получаем горизонтальную асимптоту $y = \frac{2x}{x} = 2$. Построим асимптоты графика $x = 1$ и $y = 2$.

При построении графика функции учтем:

1) ветви графика (гиперболы) симметричны относительно точки C пересечения асимптот;

2) график функции не пересекает асимптот.

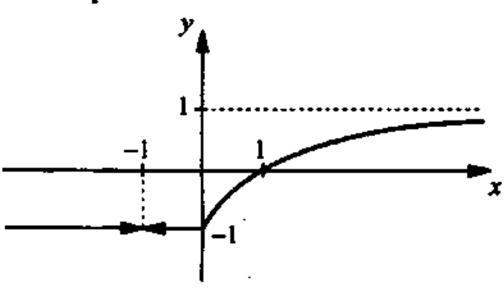
После этих замечаний легко построить график данной функции.

Пример 4

Построим график функции $y = \frac{|x|-1}{x+1}$.

Раскроем знак модуля и получим: $y = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0 \text{ и } x \neq -1, \\ \frac{x-1}{x+1}, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

При отрицательных значениях x и $x \neq -1$ построим горизонтальную прямую $y = -1$. При $x \geq 0$ строим график дробно-линейной функции $y = \frac{x-1}{x+1}$. Этот график пересекает ось ординат в точке $y = -1$ и ось абсцисс в точке $x = 1$. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. График также имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, но она в рассматриваемый промежуток $x \geq 0$ не входит. Таким образом, график данной функции состоит из прямой с удаленной точкой (–1; –1) и части гиперболы.

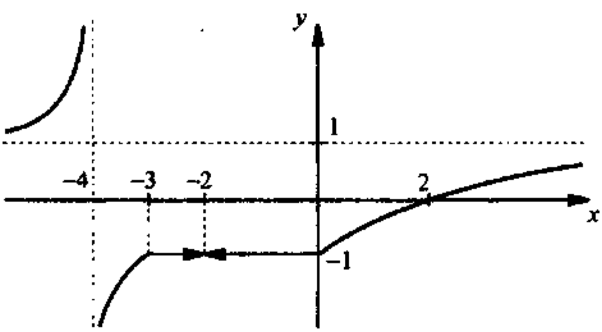


Пример 5

Построим график функции $y=\dfrac{|x-2|}{|x+3|-1}$.

Раскрыв знаки модуля, получим: $y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+4}, \text{ если } x<-3,\\ -\dfrac{x+2}{x+2}, \text{ если } -3\le x\le 0,\\ \dfrac{x-2}{x+2}, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Построим полученные зависимости. На промежутке $x\in(-\infty;-3)$ гипербола $y=\dfrac{x+2}{x+4}$ имеет вертикальную асимптоту $x=-4$, ось $0x$ не пересекает. На промежутке $x\in[-3;0]$ функция $y=-\dfrac{x+2}{x+2}$ определена всюду, за исключением точки $x=-2$. При этом $y=-1$. На промежутке $x\in(0;+\infty)$ гипербола $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ и пересекает ось $0x$ в точке $x=2$. Учитывая вышесказанное, нетрудно получить график исходной функции.



Пример 6

При каком значении параметра a прямая $y=ax+1$ касается гиперболы $y=\dfrac{x-1}{x+1}$? Найдем координаты точки касания.

Очевидно, что координаты точки касания удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}y=ax+1,\\ y=\dfrac{x-1}{x+1}.\end{cases}$ При этом система должна иметь единственное решение. Приравняем правые части и получим уравнение: $ax+1=\frac{x-1}{x+1}$, или $ax^2+x+ax+1=x-1$, или $ax^2+ax+2=0$ (очевидно, что $a \neq 0$). Чтобы это квадратное уравнение имело один корень, его дискриминант $D = a^2 - 8a = 0$, откуда $a = 8$. Найдем координаты точки касания. Подставим значение $a = 8$ в уравнение $ax^2 + ax + 2 = 0$ и получим: $8x^2 + 8x + 2 = 0$ или $2(2x + 1)^2 = 0$, откуда $x=-\frac{1}{2}$. Найдем соответствующее значение $y=ax+1=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-3$.

Итак, координаты точки касания графиков $\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Приведите графики функции $y=\frac{k}{x}$ для $k > 0$ и для $k < 0$.
2. Понятие асимптоты графика функции.
3. Определение дробно-линейной функции.
4. Способы построения графика дробно-линейной функции.
5. Нахождение асимптот графика дробно-линейной функции.

V. Задание на уроках

§ 10, № 19 (а, б); 23 (в, г); 24 (а, б).

VI. Задание на дом

§ 10, № 19 (в, г); 23 (а, б); 24 (в, г); 27.

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x-1}{x-3}$; б) $y=\frac{|x|-1}{x-3}$; в) $y=\frac{x-1}{|x|-3}$;

г) $y=\frac{|x|-1}{|x|-3}$; д) $y=\frac{|x-1|}{x-3}$; е) $y=\frac{x-1}{|x-3|}$;

ж) $y=\left|\frac{x-1}{x-3}\right|$.

2. Постройте график уравнения:

а) $|y|=\frac{x-1}{x-3}$; б) $|y|=\frac{|x|-1}{|x|-3}$;

в) $|y|=\frac{x-1}{|x|-3}$; г) $|y|=\frac{x-1}{|x-3|}$.

3. Постройте график функции $y(x)$. При каких значениях параметра a уравнение $a = y(x)$ не имеет решений?

а) $y(x)=\dfrac{x+2}{x-\dfrac{4}{x}}$; б) $y(x)=\dfrac{x-3}{\dfrac{9}{x}-x}$.

Ответы: а) $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=1$; б) $a=-1$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 52–53. Контрольная работа по теме «Числовые функции»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите область определения и область значений функции $y=2\sqrt{3x-6}+4$.
2. Исследуйте на монотонность функцию $y=3x^2+2x-7$.
3. Найдите наибольшее значение функции $y=-3x^2-6x+5$.
4. Постройте график функции:
   а) $y=x^2+4x$;
   б) $y=\dfrac{x+1}{x}$.
5. Найдите значение выражения $6\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}+4\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

Вариант 2

1. Найдите область определения и область значений функции $y=3\sqrt{2x-4}+1$.
2. Исследуйте на монотонность функцию $y=-5x^2-4x+11$.
3. Найдите наибольшее значение функции $y=-2x^2+4x-7$.
4. Постройте график функции:
   а) $y=x^2-6x$;

б) $y=\dfrac{x-1}{x}$.

5. Найдите значение выражения $4\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}+6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$.

Вариант 3

1. Найдите область определения и область значений функции $y=3\sqrt{2x-4}+4x-2$.

2. Исследуйте на монотонность функцию $y = 7x^2 - 2|x| + 1$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{4}{x^2-6x+11}+7$.

4. Постройте график функции:

а) $y = -|x + 1| + 2$;

б) $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$.

5. Упростите выражение $2\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}\right)+\dfrac{100}{25-x}$.

Вариант 4

1. Найдите область определения и область значений функции $y=2\sqrt{3x-6}+2x-5$.

2. Исследуйте на монотонность функцию $y = -5x^2 + 4|x| - 3$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{8}{x^2-4x+6}+1$.

4. Постройте график функции:

а) $y = -|x - 2| + 1$;

б) $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$.

5. Упростите выражение $3\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+4}\right)+\dfrac{96}{16-x}$.

Вариант 5

1. Найдите область определения и область значений функции $y=4\sqrt{3x-6}+2x^2+4x-5$.

2. Исследуйте на монотонность функцию $y = (x - 1)|x + 3|$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{3x^2-6x+23}{x^2-2x+5}$. При каком значении x оно достигается?

4. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 5|x| + 4$;

б) $y = \dfrac{x-3}{|x-2|-1}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{x-15}{\sqrt{x+1}-4} - \dfrac{x-3}{2+\sqrt{x+1}}$.

Вариант 6

1. Найдите область определения и область значений функции $y = 3\sqrt{2x-4} + 4x^2 - 8x + 5$.

2. Исследуйте на монотонность функцию $y = |x-1|(x+3)$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{5x^2+10x+14}{x^2+2x+4}$. При каком значении x оно достигается?

4. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

б) $y = \dfrac{x-3}{|x-1|-2}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} - \dfrac{x-12}{3+\sqrt{x-3}}$.

Урок 54. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [4; +\infty)$.

2. Убывает на $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right]$, возрастает на $\left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

3. $y_{\text{наиб}} = 8$ при $x = -1$.

4. График построен.
5. 4.

Вариант 2

1. $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [1; +\infty)$.
2. Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right]$, убывает на $\left[-\frac{2}{5}; +\infty\right)$.
3. $y_{наиб} = -5$ при $x = 1$.
4. График построен.
5. –2.

Вариант 3

1. $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [6; +\infty)$.
2. Убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right] \cup \left[0; \frac{1}{7}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{1}{7}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{7}; +\infty\right)$.
3. $y_{наиб} = 9$ при $x = 3$.
4. График построен.
5. 4.

Вариант 4

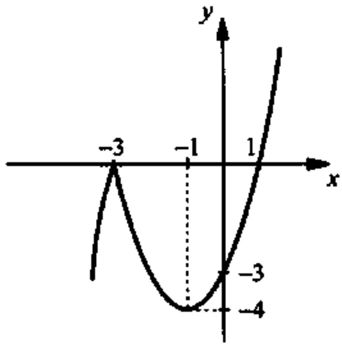
1. $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [-1; +\infty)$.
2. Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[0; \frac{2}{5}\right]$, убывает на $\left[-\frac{2}{5}; 0\right] \cup \left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.
3. $y_{наиб} = 5$ при $x = 2$.
4. График построен.
5. 6.

Вариант 5

1. Область определения функции $y = 4\sqrt{3x-6} + 2x^2 + 4x - 5$ задается неравенством $3x - 6 \geq 0$, откуда $x \geq 2$ и $D(y) = [2; +\infty)$. Функции $y_1 = 4\sqrt{3x-6}$ и $y_2 = 2x^2 + 4x - 5$ на промежутке $[2; +\infty)$ возрастают. Найдем $y(2) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 5 = 11$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [11; +\infty)$.

Ответ: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [11; +\infty)$.

2. Раскроем знак модуля. При $x < -3$ функция имеет вид: $y = -(x - 1)(x + 3)$. На промежутке $(-\infty; -3]$ такая функция возрастает. При $x \geq -3$ функция имеет вид $y = (x - 1)(x + 3)$. Эта функция имеет вершину в точке $x_0 = -1$. Поэтому на промежутке $[-3; -1]$ функция убывает, а на луче $[-1; +\infty)$ – возрастает. Легко также построить график функции.



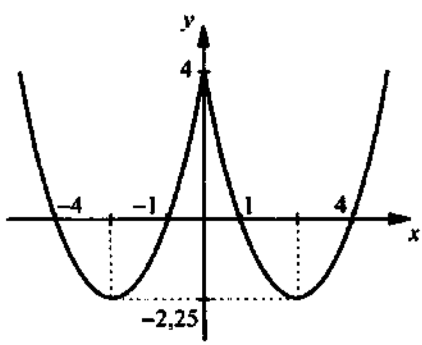
Ответ: возрастает на $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$, убывает на $[-3; -1]$.

3. В данной функции $y = \dfrac{3x^2 - 6x + 23}{x^2 - 2x + 5}$ выделим целую часть и запишем ее в виде: $y = \dfrac{3x^2 - 6x + 15 + 8}{x^2 - 2x + 5} = \dfrac{3(x^2 - 2x + 5) + 8}{x^2 - 2x + 5} = 3 + \dfrac{8}{(x-1)^2 + 4}$.

Очевидно, что наибольшее значение функция y достигает, если второе слагаемое максимально, т. е. знаменатель дроби минимальный. Это имеет место при $x = 1$ и $y_{наиб} = 3 + \dfrac{8}{4} = 5$.

Ответ: $y_{наиб} = 5$ при $x = 1$.

4а. Очевидно, что функция $y = x^2 - 5|x| + 4$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x \geq 0$ функция имеет вид: $y = x^2 - 5x + 4$. График пересекает ось ординат в точке $y = 4$, ось абсцисс – в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Вершина параболы имеет координаты $(2{,}5; -2{,}25)$. Строим этот график при $x \geq 0$ и симметрично отражаем его влево.

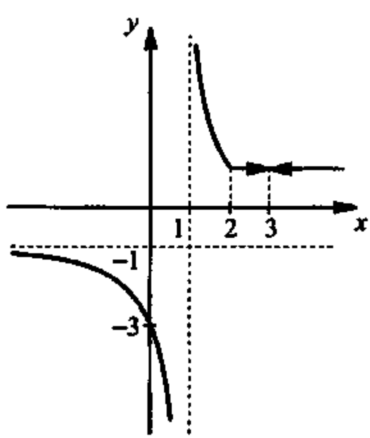


Ответ: график построен.

4б. Раскроем знак модуля и запишем функцию $y=\dfrac{x-3}{|x-2|-1}$ в виде

$y=\begin{cases}\dfrac{x-3}{1-x}, \text{ если } x<2,\\ 1, \text{ если } x\geq 2 \text{ и } x\neq 3.\end{cases}$ При $x<2$ строим гиперболу $y=\dfrac{x-3}{1-x}$.

Она пересекает ось ординат в точке $y=-3$, имеет вертикальную асимптоту $x=1$ и горизонтальную асимптоту $y=-1$. При $x\geq 2$ и $x\neq 3$ строим прямую $y=1$.



Ответ: график построен.

5. Чтобы упростить выражение $A=\dfrac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}-\dfrac{x-3}{2+\sqrt{x+1}}$, удобно ввести новую переменную $y=\sqrt{x+1}$, тогда $y^2=x+1$ и $x=y^2-1$.

Выражение имеет вид: $A=\dfrac{y^2-16}{y-4}-\dfrac{y^2-4}{y+2}=(y+4)-(y-2)=6$.

Ответ: 6.

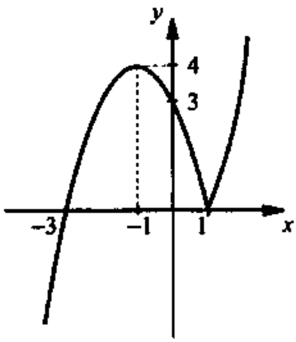
Вариант 6

1. Область определения функции $y=3\sqrt{2x-4}+4x^2-8x+5$ задается неравенством $2x-4\geq 0$, откуда $x\geq 2$ и $D(y)=[2;+\infty)$. Функции $y_1=3\sqrt{2x-4}$ и $y_2=4x^2-8x+5$ на промежутке $[2;+\infty)$ возрастают. Найдем $y(2)=3\cdot 0+4\cdot 4-8\cdot 2+5=5$. Поэтому область значений данной функции $E(y)=[5;+\infty)$.

Ответ: $D(y)=[2;+\infty)$, $E(y)=[5;+\infty)$.

2. Раскроем знак модуля. При $x<1$ функция имеет вид: $y=-(x-1)(x+3)$. Эта функция имеет вершину в точке $x_0=-1$. По-

этому на луче $(-\infty; -1]$ функция возрастает, а на отрезке $[-1; 1]$ – убывает. При $x \geq 1$ функция имеет вид $y = (x - 1)(x + 3)$. На луче $[1; +\infty)$ такая функция возрастает. Легко также построить график функции.



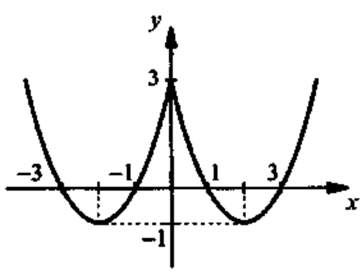
Ответ: возрастает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$.

3. В данной функции $y = \dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4}$ выделим целую часть и запишем ее в виде $y = \dfrac{5x^2 + 10x + 20 - 6}{x^2 + 2x + 4} = \dfrac{5(x^2 + 2x + 4) - 6}{x^2 + 2x + 4} = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$.

Очевидно, что наименьшее значение функция y достигает, если вычитаемое максимально, т. е. знаменатель дроби минимальный. Это имеет место при $x = -1$ и $y_{\text{наим}} = 5 - \dfrac{6}{3} = 3$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = 3$ при $x = 1$.

4а. Очевидно, что функция $y = x^2 - 4|x| + 3$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x \geq 0$ функция имеет вид: $y = x^2 - 4x + 3$. График пересекает ось ординат в точке $y = 3$, ось абсцисс – в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Вершина параболы имеет координаты $(2; -1)$. Строим этот график при $x \geq 0$ и симметрично отражаем его влево.



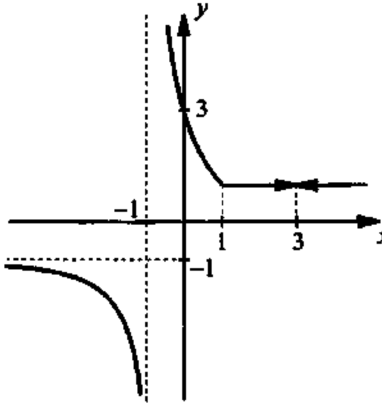
Ответ: график построен.

4б. Раскроем знак модуля и запишем функцию $y=\dfrac{x-3}{|x-1|-2}$ в виде

$$y=\begin{cases}\dfrac{3-x}{x+1}, \text{ если } x<1,\\ 1, \text{ если } x\geq 1 \text{ и } x\neq 3.\end{cases}$$

При $x < 1$ строим гиперболу $y=\dfrac{3-x}{x+1}$.

Она пересекает ось ординат в точке $y = 3$, имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и горизонтальную асимптоту $y = -1$. При $x \geq 1$ и $x \neq 3$ строим прямую $y = 1$.



Ответ: график построен.

5. Чтобы упростить выражение $A=\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}-\dfrac{x-12}{3+\sqrt{x-3}}$, удобно ввести новую переменную $y=\sqrt{x-3}$, тогда $y^2 = x - 3$ и $x = y^2 + 3$.

Выражение имеет вид: $A=\dfrac{y^2-1}{y+1}-\dfrac{y^2-9}{y+3}=(y-1)-(y-3)=2.$

Ответ: 2.

Уроки 55–56. Зачетная работа по теме «Числовые функции»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите область определения функции $y = 2\sqrt{4-2x} + \frac{3x-5}{\sqrt{x+1}}$.

2. Найдите область значений функции $y = 2x^2 - 8x$.

3. Вычислите: $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + 3^4 - \frac{1}{3} - 2(\sqrt[3]{5})^0$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}$.

5. Упростите выражение $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) - a$.

6. Постройте график функции:
а) $y = (x+1)(3-x)$;
б) $y = \sqrt{x-1} - 2$.

В

7. Упростите выражение $\frac{5^{n-1} + 2\cdot 5^{n+1} - 3\cdot 5^n}{2\cdot 5^n}$.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}$. При каких значениях x оно достигается?

9. Найдите координаты точек прямой $y = 6x - 35$, равноудаленных от осей координат.

10. Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x^2 + 4x + 4}$.

С

11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 3x + 2|x-2| - |x+1| - 2$.

12. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 13a + 45 + \sqrt{a^2 - 8a + 16}}$ при $a \le 4$.

13. Прямая проходит через точку (0; –1) и касается гиперболы $y = \frac{1}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

Вариант 2

А

1. Найдите область определения функции $y = 3\sqrt{x-1} - \frac{5x+1}{\sqrt{8-2x}}$.

2. Найдите область значений функции $y = 4x - 2x^2$.

3. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}+2^5-0,25-3(\sqrt[3]{7})^0$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

5. Упростите выражение $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})+b$.

6. Постройте график функции:

а) $y=(x-1)(x+3)$;

б) $y=\sqrt{x+2}-1$.

B

7. Упростите выражение $\frac{2\cdot 3^{n-1}+4\cdot 3^{n+1}-3^n}{4\cdot 3^n}$.

8. Найдите наибольшее значение функции $y=7-\sqrt{3x^2+4x-4}$. При каких значениях x оно достигается?

9. Найдите координаты точек прямой $y=-5x-24$, равноудаленных от осей координат.

10. Постройте график функции $y=\sqrt[4]{x^2-6x+9}$.

C

11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=2x+3|x-1|-4|x+2|-1$.

12. Упростите выражение $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ при $a\geq 3$.

13. Прямая проходит через точку (0; 3) и касается гиперболы $y=\frac{3}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. $D(y)=(-1;2]$.
2. $E(y)=[-8;+\infty)$.
3. 80.
4. 18.
5. b.
6. График построен.
7. $\frac{18}{5}$.
8. $y_{наим}=6$ при $x=-0,5$ и $x=1,5$.

9. (5; –5) и (7; 7).

10. График построен.

11. Раскроем знаки модуля и найдем вид функции $y = 3x + 2|x-2| - |x+1| - 2$ в каждом промежутке.

а) При $x \le -1$ получаем: $y = 3x - 2(x-2) + (x+1) - 2 = 2x + 3$ – функция возрастает.

б) При $-1 \le x \le 2$ имеем: $y = 3x - 2(x-2) - (x+1) - 2 = 1$ – функция постоянна.

в) При $x \ge 2$ получаем: $y = 3x + 2(x-2) - (x+1) - 2 = 4x - 7$ – функция возрастает.

Ответ: промежутки возрастания $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$, промежутков убывания нет.

12. Упростим выражение: $\sqrt{a^2 - 13a + 45 + |a-4|} =$

$= \sqrt{a^2 - 13a + 45 - (a-4)} = \sqrt{a^2 - 14a + 49} = |a-7| = -(a-7) = 7 - a.$

Учтено, что $a \ge 4$ и $|a-4| = -(a-4)$ и $|a-7| = -(a-7)$.

Ответ: $7 - a$.

13. Так как прямая проходит через точку (0; –1), то ее вид $y = ax - 1$. Если прямая $y = ax - 1$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$ касаются, то уравнение $ax - 1 = \frac{1}{x}$ или $ax^2 - x - 1 = 0$ имеет единственный корень. Поэтому дискриминант $D = 1 + 4a = 0$, откуда $a = -\frac{1}{4}$. Прямая $y = -\frac{1}{4}x - 1$ пересекает ось абсцисс в точке $x = -4$.

Ответ: $x = -4$.

Вариант 2

1. $D(y) = [1; 4)$.

2. $E(y) = (-\infty; 2]$.

3. 30.

4. 8.

5. a.

6. График построен.

7. $\frac{35}{12}$.

8. $y_{наиб} = 7$ при $x = -2$ и $x = \frac{2}{3}$.

9. (–4; –4) и (–6; 6).

10. График построен.

11. Раскроем знаки модуля и найдем вид функции $y = 2x + 3|x-1| - 4|x+2| - 1$ в каждом промежутке.

а) При $x \le -2$ получаем: $y = 2x - 3(x-1) + 4(x+2) - 1 = 3x + 10$ – функция возрастает.

б) При $-2 \le x \le 1$ имеем: $y = 2x - 3(x-1) - 4(x+2) - 1 = -5x - 6$ – функция убывает.

в) При $x \ge 1$ получаем: $y = 2x + 3(x-1) - 4(x+2) - 1 = x - 12$ – функция возрастает.

Ответ: промежутки возрастания $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$, промежуток убывания $[-2; 1]$.

12. Упростим выражение: $\sqrt{a^2 + a + 4 + |a-3|} = \sqrt{a^2 + a + 4 + (a-3)} =$

$= \sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a+1| = a + 1.$ Учтено, что $a \ge 4$ и $|a - 4| = a - 4$ и $|a + 1| = a + 1$.

Ответ: $a - 1$.

13. Так как прямая проходит через точку (0; 3), то ее вид $y = ax + 3$. Если прямая $y = ax + 3$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$ касаются, то уравнение $ax + 3 = \frac{3}{x}$ или $ax^2 + 3x - 3 = 0$ имеет единственный корень. Поэтому дискриминант $D = 9 + 12a = 0$, откуда $a = -\frac{3}{4}$. Прямая $y = -\frac{3}{4}x + 3$ пересекает ось абсцисс в точке $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Глава 4
Прогрессии

Уроки 57–58. Числовые последовательности

Цель: привести основные понятия, связанные с последовательностями.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

1. Определение числовой последовательности

Множество чисел, для каждого из которых известен его порядковый номер, называют **последовательностью.**

Пример 1

а) В последовательности положительных нечетных чисел 1, 3, 5, 7, ... известно, что первое число равно 1, второе число равно 3, третье число равно 5 и т. д.

б) В последовательности правильных дробей с числителем 1 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ известно, что первое число равно $\frac{1}{2}$, второе число равно $\frac{1}{3}$, третье число равно $\frac{1}{4}$ и т. д.

Числа, образующие последовательность, называют **членами последовательности.** Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена: y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... Соответственно, член последовательности с номером n (или n-й *член последовательности*) обозначают y_n, а саму последовательность – (y_n).

Пример 2

Рассмотрим последовательность натуральных трехзначных чисел: 100; 101; 102; ...; 999. В ней $y_1 = 100$, $y_2 = 101$, $y_3 = 102$, ..., $y_{900} = 999$. Член этой последовательности с номером n (n-й член последовательности) можно вычислить по формуле $y_n = 99 + n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, 900$.

Последовательность может содержать **бесконечно много членов** (пример 1). Такую последовательность называют **бесконечной.** Последовательность может содержать и **конечное число членов** (пример 2). Такую последовательность называют **конечной.**

2. Способы задания последовательностей

Последовательность необходимо задать, т. е. указать способ, с помощью которого можно найти каждый ее член. Рассмотрим основные способы задания последовательностей.

1. Аналитический способ (формула n-го члена)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти по номеру n ее член y_n.

Пример 3

а) Пусть последовательность задана формулой $y_n = 3n - 2$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $y_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $y_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ и т. д. Имеем последовательность 1, 4, 7, ...

б) Пусть последовательность задана формулой $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = \dfrac{1+(-1)^1}{2} = 0$, $y_2 = \dfrac{1+(-1)^2}{2} = 1$, $y_3 = \dfrac{1+(-1)^3}{2} = 0$, $y_4 = \dfrac{1+(-1)^4}{2} = 1$ и т. д. Имеем последовательность 0, 1, 0, 1, ...

2. Аналитический способ (рекуррентная формула)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти следующие члены последовательности, если известны один или несколько предыдущих членов.

Пример 4

а) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+1} = 2y_n + 3$, где $y_1 = 5$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $y_{1+1} = 2y_1 + 3$ или $y_2 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Пишем формулу для $n = 2$: $y_{2+1} = 2y_2 + 3$ или $y_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Запишем формулу для $n = 3$: $y_{3+1} = 2y_3 + 3$ или $y_4 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 5, 13, 29, 61, ...

б) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n$, где $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $y_{1+2} = 2y_{1+1} + 3y_{1+1}$ или $y_3 = 2y_2 + 3y_1$ или $y_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$.

Пишем формулу для $n = 2$: $y_{2+2} = 2y_{2+1} + 3y_2$ или $y_4 = 2y_3 + 3y_2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$.

Запишем формулу для $n = 3$: $y_{3+2} = 2y_{3+1} + 3y_3$ или $y_5 = 2y_4 + 3y_3$ или $y_5 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 1, 2, 7, 20, 61, ...

3. Описательный способ

Описывается способ получения членов последовательности.

Пример 5

а) Рассмотрим последовательность натуральных четных чисел. Из описания последовательности легко выписать ее члены: 2, 4, 6, 8, ...

б) Рассмотрим последовательность приближений по недостатку с точностью до n цифр иррационального числа π. Из описания последовательности выписываем ее члены: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3, 1415; ...

3. Основные свойства последовательностей

Теперь рассмотрим два основных свойства последовательностей.

1. Ограниченность последовательности

Последовательность (y_n) называют **ограниченной**, если существуют два таких числа m и M, что для любого натурального номера n выполнено неравенство $m \le y_n \le M$.

Пример 6

Докажем ограниченность последовательности $y_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Найдем первый член последовательности $y_1 = \dfrac{1-1}{1+2} = 0$ и член последовательности с очень большим номером n, например $y_{100} = \dfrac{100-1}{100+2} = \dfrac{99}{102} \approx 1$. Возникает гипотеза, что последовательность ограничена и $m = 0$ и $M = 1$. Поэтому надо доказать, что при всех натуральных значениях n выполнено неравенство $0 \le \dfrac{n-1}{n+2} \le 1$. Очевидно, что левая часть неравенства $0 \le \dfrac{n-1}{n+2}$ выполняется. Рассмотрим правую часть неравенства $\dfrac{n-1}{n+2} \le 1$. Так как выражение $n + 2$ положительно, то получаем неравенство $n - 1 \le$ $\le n + 2$ или $-1 \le 2$, которое является верным.

2. Монотонность последовательности

Последовательность (y_n) называют **возрастающей**, если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. $y_{n+1} > y_n$ для $n \ge 1$.

Последовательность (y_n) называют **убывающей**, если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. $y_{n+1} < y_n$ для $n \ge 1$.

Пример 7

Определим монотонность последовательности $y_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Запишем $(n+1)$-й член последовательности $y_{n+1}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)+2}=$ $=\frac{n}{n+3}$. Найдем разность двух соседних членов $y_{n+1}-y_n=\frac{n}{n+3}-$ $-\frac{n-1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{3}{(n+3)(n+2)}$. Так как n – натуральное число, то при всех n дробь $\frac{3}{(n+3)(n+2)}$ положительна. Поэтому $y_{n+1}-y_n>0$ или $y_{n+1}>y_n$ при всех n. Тогда по определению данная последовательность (y_n) возрастающая.

Как видно из этого урока, понятия последовательности и функции, их способы задания и свойства очень похожи. Поэтому последовательность (y_n) можно рассматривать как функцию y_n натурального аргумента n, т. е. $y_n=f(n)$. Тогда автоматически возникают понятия ограниченности и монотонности последовательности.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение последовательности.
2. Основные способы задания последовательности.
3. Ограниченность последовательности.
4. Монотонность последовательности.

IV. Задание на уроках

§ 15, № 1; 6; 8; 10 (а); 12 (г); 16 (а); 18 (а, б); 19 (в, г); 20 (а, б); 23 (в, г); 35 (а, б); 37 (в, г); 39 (а, б); 41 (г).

V. Задание на дом

§ 15, № 2; 7; 9; 10 (б); 13 (б); 16 (г); 18 (г); 19 (а, б); 20 (в, г); 23 (а, б); 35 (в, г); 37 (а, б); 39 (в, г); 41 (б).

VI. Творческие задания

1. Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), если:
   а) $a_{n+1}=3a_n-1$, $a_1=1$;
   б) $a_{n+1}=4a_n+3$, $a_1=2$;
   в) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$, $a_1=1$, $a_2=2$;
   г) $a_{n+2}=a_{n+1}-2a_n$, $a_1=2$, $a_2=1$;
   д) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$, $a_1=1$, $a_2=2$;
   е) $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$, $a_1=2$, $a_2=1$.

Ответы: а) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=14$; б) $a_1=2$, $a_2=11$, $a_3=47$, $a_4=191$; в) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$; г) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=-3$, $a_4=-5$; д) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$; е) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=9$.

2. Докажите ограниченность последовательности (a_n):

а) $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; б) $a_n = \dfrac{1-3n}{n+2}$;

в) $a_n = \dfrac{n+5}{n}$; г) $a_n = \dfrac{3-2n}{n+1}$.

3. Определите монотонность последовательности (a_n):

а) $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$;

в) $a_n = \dfrac{5-2n}{n+2}$; г) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

д) $a_n = \dfrac{3n-4}{n+3}$; е) $a_n = \dfrac{3-n}{n+1}$;

ж) $a_n = n^2 + 4n + 10$; з) $a_n = n^2 - 8n + 20$.

Ответы: а, д, ж) возрастающая; в, е) убывающая; б, г, з) немонотонная.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 59–61. Арифметическая прогрессия

Цель: рассмотреть частный вид последовательности – арифметическую прогрессию.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение возрастающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3 - 2a_n$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

Вариант 2

1. Определение убывающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{3-2n}{n+2}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3a_n - 2$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

III. Изучение нового материала

1. Основные понятия

Из всех последовательностей наиболее изучены две: **арифметическая прогрессия** и **геометрическая прогрессия**, которые будут рассмотрены в этой главе. Сначала рассмотрим арифметическую прогрессию.

Последовательность чисел a_n, **каждый член которой** (начиная со второго) **равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d** (разностью прогрессии), называется **арифметической** прогрессией: $a_{n+1} = a_n + d$ $(n \geq 1)$. При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, при $d < 0$ – убывает.

Пример 1

Найдем первые пять членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

Из определения арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$ получаем: при $n = 1$ $a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$, при $n = 2$ $a_3 = a_2 + d = 7 + 2 = 9$, при $n = 3$ $a_4 = a_3 + d = 9 + 2 = 11$, при $n = 4$ $a_5 = a_4 + d = 11 + 2 = 13$. Итак, эти члены 5, 7, 9, 11, 13.

2. Формула n-го числа арифметической прогрессии

В определении арифметической прогрессии использована рекуррентная формула $a_{n+1} = a_n + d$. Удобнее получить формулу n-го члена.

Пример 2

Получим формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$ запишем $(n-1)$ равенство:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_4 &= a_3 + d \\ &\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}\right\} n-1.$$

Сложим эти равенства, тогда в левой и правой частях сокращаются одинаковые члены: a_2, a_3, ..., a_{n-1}, и получаем: $a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1} = a_1 + d(n-1)$.

Таким образом, получена важнейшая формула – **формула *n*-го члена** арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Как правило, задачи на эту тему достаточно простые. Наиболее распространенный прием решения таких задач – записать условия задачи, используя в качестве неизвестной первый член и разность прогрессии.

Пример 3

В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найдем прогрессию.

Выразим все члены прогрессии через ее первый член и разность: $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$ – и запишем условия задачи: $8 = a_2 + a_5 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 5d$, $14 = a_3 + a_7 = 2a_1 + 8d$. Для определения a_1 и d получаем линейную систему уравнений: $\begin{cases} 8 = 2a_1 + 5d, \\ 14 = 2a_1 + 8d. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, найдем: $6 = 3d$ или $d = 2$, и из любого из уравнений: $a_1 = -1$.

Пример 4

Первый член арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ... равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $S = a_1a_3 + a_2a_3$ имеет минимальное значение?

Как и в предыдущей задаче выразим члены прогрессии a_2 и a_3 через первый член ($a_1 = 1$) и разность d: $a_2 = a_1 + d = 1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2d$. Тогда $S = 1(1+ 2d) + (1 + d)(1 + 2d) = 2d^2 + 5d + 2$. Функция S в зависимости от d является квадратичной функцией (параболой) и достигает минимального значения при $d = -\frac{5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4}$.

Пример 5

Найдем сумму чисел $\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}} + \frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}$.

Обратим внимание на то, что числа, стоящие под радикалами, образуют арифметическую прогрессию: 100, 101, 102, 103, ..., 399, 400. Умножим числители и знаменатели дробей на разность чисел, стоящих в знаменателях: $S=\dfrac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{(\sqrt{101}+\sqrt{100})(\sqrt{101}-\sqrt{100})}+$

$$+\ldots+\frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{(\sqrt{400}+\sqrt{399})(\sqrt{400}-\sqrt{399})}=\frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{101-100}+\frac{\sqrt{102}-\sqrt{101}}{102-101}+$$

$$+\ldots+\frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{400-399}.$$

За счет того, что числа образовали арифметическую прогрессию, знаменатели дробей оказались равными разности прогрессии, т. е. 1. Тогда имеем: $S=\sqrt{101}-\sqrt{100}+\sqrt{102}-\sqrt{101}+\sqrt{103}-\sqrt{102}+\ldots+\sqrt{400}-\sqrt{399}$. Легко заметить, что в данной сумме сокращаются все числа, кроме $-\sqrt{100}$ и $\sqrt{400}$, и тогда сумма $S=-\sqrt{100}+\sqrt{400}=-10+20=10$.

Достаточно часто арифметическая прогрессия встречается в текстовых и геометрических задачах.

Пример 6

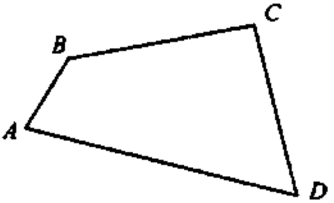
Четыре целых различных числа образуют арифметическую прогрессию. Одно из этих чисел равно сумме квадратов остальных трех чисел. Найдем эти числа.

Пусть эти числа имеют вид: a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$ (очевидно, что a и d − целые числа). Запишем условие задачи: $a^2+(a+d)^2+$ $+(a+2d)^2=a+3d$ или $3a^2+6ad+5d^2=a+3d$. Будем рассматривать это уравнение как квадратное, считая a неизвестной и d параметром. Запишем уравнение в виде: $3a^2+a\cdot(6d-1)+(5d^2-3d)=0$. Чтобы это уравнение имело решение, необходима неотрицательность его дискриминанта D. Найдем $D=(6d-1)^2-4\cdot3\cdot(5d^2-3d)=$ $=36d^2-12d+1-60d^3+36d=-24d^2+24d+1\geq0$. Решим это квадратное неравенство. Корни соответствующего уравнения $d=\dfrac{6\pm\sqrt{42}}{12}=$ $=\dfrac{6\pm6{,}5}{12}$, т. е. $d_1\approx-0{,}04$ и $d_2\approx1{,}04$. Тогда решение неравенства $-0{,}04\leq d\leq1{,}04$. В этом промежутке есть два целых значения $d=1$ и $d=0$ (не подходит, так как даны различные числа).

Для $d=1$ уравнение $3a^2+a(6d-1)+(5d^2-3d)=0$ принимает вид: $3a^2+5a+2=0$. Корни его $a_1=-1$, $a_2=-\dfrac{2}{3}$ (не подходит). Итак, искомые числа -1; 0; 1; 2.

Пример 7

Стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли в него вписать окружность?



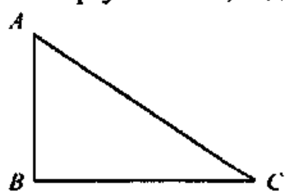
Пусть стороны четырехугольника AB, BC, AD, CD в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d: $AB = a$, $BC = a + d$, $AD = a + 2d$, $CD = a + 3d$.

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны, т. е. $AB + CD = BC + AD$. Проверим это условие: $a + (a + 3d) = (a + d) + (a + 2d)$. Так как равенство верное, то в такой четырехугольник можно вписать окружность. Но это возможно только в том случае, когда стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию именно в следующем порядке: AB, BC, AD, CD.

Пример 8

Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдем стороны треугольника.

Пусть наименьший катет ΔABC $AB = a$, тогда второй катет $BC = a + d$ и гипотенуза $AC = a + 2d$ (где d – разность прогрессии, $d > 0$). Запишем теорему Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, или $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$, или $a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$. Решая это однородное уравнение, получим: $a = 3d$ и $a = -d$ (не подходит). Имеем: $AB = 3d$, $BC = 4d$, $AC = 5d$ (где d – любое число). То есть условию задачи удовлетворяют прямоугольные треугольники, подобные египетскому.



3. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Пример 9

Получим формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n. Запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае члены в порядке возрастания их номеров, во втором случае – в порядке убывания номеров: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$; $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$. Сложим эти равенства: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Покажем, что все суммы в скобках равны друг другу. Получаем: $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$; $a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ и т. д.

Тогда имеем: $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (первая формула получена). Используем формулу n-го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$. Тогда имеем: $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (вторая формула получена).

Пример 10

В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_8 = 27$. Найдем сумму первых сорока членов прогрессии.

Сначала найдем первый член a_1 и разность d прогрессии. Запишем условия задачи: $\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 7d = 27. \end{cases}$ Из этой линейной системы уравнений находим $a_1 = -1$ и $d = 4$. Теперь найдем сумму первых сорока членов прогрессии: $S_{40} = \frac{2 \cdot (-1) + 4 \cdot (40 - 1)}{2} \cdot 40 = \frac{-2 + 4 \cdot 39}{2} \cdot 40 = 154 \cdot 20 = 3080$.

Пример 11

Найдем сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3.

Первое число легко угадать: $a_1 = 103$. Легко также угадать несколько последующих таких чисел: $a_2 = 107$, $a_3 = 111$, $a_4 = 115$. Видно, что искомые числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом 103 и разностью 4. Общий член этой прогрессии можно записать в виде $a_n = 103 + 4(n - 1) = 99 + 4n$.

Определим теперь число членов в сумме. Так как последнее трехзначное число 999, то получаем условие $a_n \leq 999$ или $99 + 4n \leq 999$.

Решив это неравенство, найдем $n \le 225$. Итак, в искомую сумму войдут 225 слагаемых. Найдем сумму 225 членов арифметической прогрессии с первым членом 103 и разностью 4: $S = \frac{2\cdot 103 + 4\cdot(225-1)}{2}\cdot 225 = 551\cdot 225 = 123975.$

Пример 12

Известно, что при любом n сумма S_n членов в некоторой последовательности (a_n) определяется по формуле: $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) = 4n^2 - 3n$. Докажем, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и напишем первые три члена этой прогрессии.

Для доказательства используем определение арифметической прогрессии. Сначала получим формулу общего члена последовательности (a_n). Очевидно, что $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - 3n) - [4(n-1)^2 - 3(n-1)] = 8n - 7$. Рассмотрим разность двух соседних членов последовательности: $a_n - a_{n-1} = (8n-7) - [8(n-1) - 7] = 8$. Отсюда получим: $a_n = a_{n-1} + 8$, т. е. каждый член последовательности равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 8. Итак, данная последовательность по определению является арифметической прогрессией.

Так как в процессе доказательства была получена формула общего члена этой арифметической прогрессии $a_n = 8n - 7$, то легко находим: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 17$.

Пример 13

Решим уравнение $2 + 5 + 8 + 11 + ... + x = 155$.

В левой части уравнения находится сумма членов арифметической прогрессии 2; 5; 8; 11; ..., первый член которой 2 и разность 3. Пусть в эту сумму входит n слагаемых. Тогда, используя формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем: $\frac{2+x}{2}n = 155$. Второе уравнение получим, записав последний член этой суммы: $x = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$. Подставив второе уравнение в первое, придем к квадратному уравнению относительно n: $\frac{2+(3n-1)}{2}n = 155$ или $3n^2 + n - 310 = 0$, корни которого $n = 10$ и $n = -\frac{31}{3}$ (не подходит, так как n – число натуральное). После этого находим: $x = 3 \cdot 10 - 1 = 29$. Итак, $x = 29$ – единственный корень данного уравнения.

Пример 14

Два велосипедиста, расстояние между которыми 99 м, одновременно начинают движение навстречу друг другу. Первый велосипедист за каждую секунду проезжал по 5 м. Второй велосипедист за первую секунду проехал 1,5 м, а за каждую последующую – на 0,5 м больше, чем за предыдущую. Через какое время велосипедисты встретились?

Пусть велосипедисты встретились через n секунд. Тогда первый из них проехал до встречи $5n$ (м). Для второго велосипедиста расстояния, проезжаемые в каждую секунду, образуют арифметическую прогрессию: 1,5; 2; 2,5; 3; … . Тогда за n секунд он проедет расстояние: $\dfrac{2\cdot 1,5+0,5(n-1)}{2}n=\dfrac{2,5+0,5n}{2}n$.

Сумма расстояний, пройденных велосипедистами, равна 99 м. Получаем уравнение: $5n+\dfrac{2,5+0,5n}{2}n=99$ или $n^2 + 25n - 396 = 0$, корни которого $n_1 = 11$ и $n_2 = -36$ (не подходит). Итак, встреча произошла через 11 с.

4. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Отметим еще одно важное свойство членов арифметической прогрессии. Любой член прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних членов: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $(n\geq 2)$ (характеристическое свойство).

Пример 15

Докажем характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Используя определение арифметической прогрессии, получим: $\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=\dfrac{(a_n-d)+(a_n+d)}{2}=\dfrac{2a_n}{2}=a_n$.

Достаточно часто при решении задач рассматриваемой темы используется **характеристическое свойство** арифметической прогрессии.

Пример 16

При каких значениях x числа 6; x^2; x образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию? Найдем эти числа.

Запишем свойство арифметической прогрессии: $2x^2 = 6 + x$. Получаем квадратное уравнение, корни которого $x=-\dfrac{3}{2}$ и $x = 2$. Тогда искомыми числами будут 6; $\dfrac{9}{4}$; $-\dfrac{3}{2}$ или 6; 4; 2.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение арифметической прогрессии.
2. Формула n-го члена арифметической прогрессии.
3. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.
4. Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

V. Задание на уроках

§ 16, № 4 (а, б); 6 (г); 8; 12 (в); 17 (б); 19 (а); 28 (а, б); 30; 33 (а); 36 (б); 42 (а); 43; 48 (б); 50 (а); 53 (б); 56 (г); 61; 68 (а); 69 (б).

VI. Задание на дом

§ 16, № 4 (в, г); 6 (в); 9; 12 (г); 17 (г); 19 (б); 28 (в, г); 31; 33 (б); 36 (в); 42 (б); 44; 48 (г); 50 (б); 53 (г); 56 (б); 62; 68 (б); 69 (а).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 62–65. Геометрическая прогрессия

Цель: рассмотреть последовательность – геометрическую прогрессию.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите сумму тридцати первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 3n + 2$.
2. В арифметической прогрессии $a_6 = 1$ и $a_{10} = 13$. Найдите сумму первых двадцати членов.
3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 4.

Вариант 2

1. Найдите сумму сорока первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 4n - 3$.
2. В арифметической прогрессии $a_5 = 3$ и $a_9 = 15$. Найдите суму первых тридцати членов.
3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 3.

III. Изучение нового материала

1. Основные понятия

Рассмотрим еще одну наиболее изученную последовательность – геометрическую прогрессию.

Последовательность чисел b_n, первый член которой отличен от нуля и **каждый член**, начиная со второго, **равен предыдущему, умноженному на одно и то же** отличное от нуля **число** q, называется **геометрической** прогрессией (q – знаменатель прогрессии): $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($n \geq 1$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$).

Пример 1

Найдем первые четыре члена геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 3$.

Из определения геометрической прогрессии $b_{n+1} = b_n q$ имеем: при $n = 1$ $b_2 = b_1 q = 2 \cdot 3 = 6$, при $n = 2$ $b_3 = b_2 q = 6 \cdot 3 = 18$, при $n = 3$ $b_4 = b_3 q = 18 \cdot 3 = 54$. Итак, эти члены 2, 6, 18, 54.

Геометрическая прогрессия задается **рекуррентной** формулой. При решении задач более удобна **формула n-го члена.**

2. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Пример 2

Получим формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Используем рекуррентную формулу $b_{k+1} = b_n \cdot q$ и выпишем $(n - 1)$ равенство:

$$\left.\begin{aligned} &b_2 = b_1 q \\ &b_3 = b_2 q \\ &b_4 = b_3 q \\ &\dots \\ &b_n = b_{n-1} q \end{aligned}\right\} n-1.$$

Перемножим почленно эти равенства. При этом в обеих частях равенства сократится произведение $b_2 b_3 b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$. Получаем $b_n = b_1 q^{n-1}$ – формулу n-го члена геометрической прогрессии.

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, удобно выразить члены прогрессии через ее первый член и знаменатель.

Пример 3

Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдем эту прогрессию.

Выразим второй, третий, четвертый члены прогрессии через ее первый член: $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$ – и запишем условия задачи: $24 = b_4 - b_2 = b_1q^3 - b_1q = b_1q(q^2 - 1)$; $6 = b_2 + b_3 = b_1q + b_1q^2 = b_1q(1+q)$. Получим систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} 24 = b_1q(q^2-1), \\ 6 = b_1q(q+1). \end{cases}$ Разделив первое уравнение на второе, найдем: $4 = q - 1$, откуда $q = 5$. Тогда из второго уравнения $b_1 = \frac{1}{5}$.

Пример 4

Первый член геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ равен единице. При каком значении знаменателя прогрессии величина $4b_2 + 5b_3$ имеет минимальное значение?

Выразив второй и третий члены прогрессии через ее первый член и знаменатель: $b_2 = b_1q = q$; $b_3 = b_1q^2 = q^2$, получим: $S = 4b_2 + 5b_3 = 5q^2 + 4q$. Квадратичная функция $S(q)$ достигает минимального значения при $q = -\frac{4}{2\cdot 5} = -\frac{2}{5}$.

Пример 5

Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - x + a = 0$ и x_3, x_4 – корни уравнения $x^2 - 4x + b = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 (в указанном порядке) составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Решим уравнения и найдем числа a, b.

Для данных квадратных уравнений запишем формулы Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = a, \\ x_3 + x_4 = 4, \\ x_3x_4 = b. \end{cases}$ Рассмотрим сначала первое и третье уравнения этой системы и учтем, что $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$. Тогда получим: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1(1+q) = 1, \\ x_1q^2(1+q) = 4. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, найдем: $q^2 = 4$, откуда $q = 2$ и $q = -2$ (не подходит, так как прогрессия возрастающая, т. е. $q > 0$). Из первого уравнения получаем: $x_1 = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{3}$, тогда $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$ и $x_4 = \frac{8}{3}$. Из второго и четвертого уравнений исходной системы находим: $a = x_1x_2 = \frac{2}{9}$ и $b = x_3x_4 = \frac{32}{9}$. Итак, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}$, $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{32}{9}$.

3. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии

Сумма n первых членов вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ $(q \neq 1)$ и $S_n = nb_1$ $(q = 1)$.

Пример 6

Получим формулу для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Рассмотрим сумму n первых членов прогрессии:

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n$. (1)

Умножим эту величину на q и получим: $qS_n = b_1q + b_2q + b_3q + ... + b_{n-1}q + b_nq$. Учитывая определение геометрической прогрессии ($b_n = b_{n-1}q$: $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, ..., $b_nq = b_{n+1}$), запишем это же равенство: $qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n + b_{n+1}$. (2)

Вычтем из соотношения (2) выражение (1), тогда в правой части сокращаются члены b_2, b_3, ..., b_n, и получаем: $S_n(q-1) = b_{n+1} - b_1$, откуда $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ (разумеется, для $q \neq 1$). Учитывая, что $b_{n+1} = b_1q^n$, из этого выражения находим: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$. Итак, $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Если знаменатель $q = 1$, то геометрическая прогрессия состоит из одинаковых членов b_1. Тогда сумма первых n членов такой прогрессии равна $S_n = nb_1$.

Пример 7

Найдем сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

Сначала определим характеристики геометрической прогрессии. Используя формулу n-го члена, запишем условия задачи: $\begin{cases} b_1q = 6, \\ b_1q^3 = 24. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, получим: $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$. Для $q = 2$ найдем $b_1 = \dfrac{6}{q} = 3$ и сумму $S_8 = \dfrac{3 \cdot (2^8 - 1)}{2-1} =$

$= 3 \cdot 255 = 765$. Для $q = -2$ получаем: $b_1 = -2$ и сумму $S_8 = \frac{-3\cdot((-2)^8-1)}{-2-1} = 255$.

Пример 8

Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 3069?

Найдем характеристики геометрической прогрессии. Используя формулу n-го члена, запишем условия задачи: $\begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 51, \\ b_1q + b_1q^5 = 102 \end{cases}$ или

$\begin{cases} b_1(1+q^4) = 51, \\ b_1q(1+q^4) = 102. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, получим:

$q = \frac{102}{51} = 2$. Из первого уравнения найдем $b_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3$.

Предположим, что сложили n членов прогрессии и получили сумму $S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$. По условию такая сума равна 3069. Имеем уравнение: $3(2^n - 1) = 3069$, или $2^n - 1 = 1023$, или $2^n = 1024 = 2^{10}$, откуда $n = 10$. Итак, нужно сложить десять первых членов прогрессии.

Пример 9

Решим уравнение $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + x = 255$.

В левой части уравнения находится сумма геометрической прогрессии с первым членом 1, знаменателем 2. Пусть число слагаемых равно n. Тогда эта сумма равна: $\frac{1(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1 = 255$, отсюда: $2^n = 256 = 2^8$. Так как x является n-м членом прогрессии, то $x = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{8-1} = 2^7 = 128$.

Очень распространен круг задач, где для суммирования чисел и алгебраических выражений используется сумма геометрической прогрессии.

Пример 10

Найдем сумму $S = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$, $x \neq \pm1$.

Возведем в квадрат слагаемые этой суммы и получим: $S=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+...+\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)$. Перейдем к отрицательным показателям степени и сгруппируем слагаемые, входящие в S: $S=(x^2+x^4+...+x^{2n})+(x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+...+x^{-2n})+(2+2+...+2)$. Каждая из трех скобок содержит по n слагаемых. Причем первая скобка содержит сумму геометрической прогрессии с первым членом x^2 и знаменателем x^2; вторая – сумму геометрической прогрессии с первым членом x^{-2} и знаменателем x^{-2}; третья – сумму чисел 2. Учитывая это, получим: $S=\frac{x^2[(x^2)^n-1]}{x^2-1}+\frac{x^{-2}[(x^{-2})^n-1]}{x^{-2}-1}+2n=$

$$=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}-1}+2n=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{x^{2n}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+2n=$$

$$=\frac{x^{4n+2}-1-x^{2n}(x^2-1)}{(x^2-1)x^{2n}}+2n=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}-1+2n=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+(2n-1).$$

Пример 11

Найдем сумму $1+11+111+...+\underbrace{111...1}_{n}$.

Умножим и разделим сумму на 9: $S=\frac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n}\right)=$

$=\frac{1}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)]$. Сгруппируем слагаемые суммы: $S=\frac{1}{9}\left[(10+10^2+10^3+...+10^n)-\left(\underbrace{1+1+1+...+1}_{n}\right)\right]$. Первая скобка представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом 10 и знаменателем 10. Учитывая это, получим: $S=\frac{1}{9}\left[\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-n\right]=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

Пример 12

При любом n сумма S_n членов некоторой последовательности (b_n) находится по формуле: $S_n = 6\cdot3^n - 2$. Докажем, что эта последовательность не является геометрической прогрессией, и найдем пять первых членов этой последовательности.

Как и в примере 3, воспользуемся определением геометрической прогрессии. Найдем сначала формулу n-го члена данной последовательности (b_n). Очевидно, что $b_n = S_n - S_{n-1} = (6 \cdot 3^n - 2) - (6 \cdot 3^{n-1} - 2) =$ $= 6 \cdot 3^{n-1}(3-1) = 12 \cdot 3^{n-1}$.

Найдем отношение двух соседних членов этой последовательности: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{12 \cdot 3^{n-1}}{12 \cdot 3^{n-2}} = 3$, откуда $b_n = b_{n-1} \cdot 3$. Казалось бы, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем 3. Однако выражение для $b_n = S_n - S_{n-1}$ справедливо только для $n \geq 2$ (так как при $n = 1$ величина S_{n-1} не существует). Поэтому выражение для $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ будет справедливо уже при $n \geq 3$ (так как при $n = 2$ величина b_{n-1} не описывается полученной формулой).

Итак, из приведенных рассуждений видно, что при $n \geq 2$ члены последовательности описываются соотношением $b_n = 12 \cdot 3^{n-1}$, и по этой формуле находим: $b_2 = 36$, $b_3 = 108$, $b_4 = 324$, $a_5 = 972$. Легко проверить, что $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4} = 3$. Для нахождения b_1 учтем, что при $n = 1$ сумма S_n состоит всего из одного члена b_1 и $b_1 = S_1 = 6 \cdot 3 -$ $- 2 = 16$. Видно, что $\frac{b_2}{b_1} = \frac{36}{16} \neq 3$.

Таким образом, последовательность не является геометрической прогрессией. Первые пять ее членов, соответственно, равны 16; 36; 108; 324; 972.

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией.** Для нее, разумеется, как и для любой геометрической прогрессии, справедливы свойства и формулы, приведенные выше. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 13

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдем эту прогрессию.

Пусть дана прогрессия b_1; b_1q; b_1q^2; ...; $|q| < 1$. Тогда ее сумма $4 = \frac{b_1}{1-q}$. Кубы членов данной прогрессии b_1^3; $b_1^3q^3$; $b_1^3q^6$; ... также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3. Так как при $|q| < 1$ величина $|q^3| = |q|^3 < 1$, то эта прогрессия также бесконечно убывающая и ее сумма: $192=\dfrac{b_1^3}{1-q^3}$.

Получаем систему нелинейных уравнений: $\begin{cases}4=\dfrac{b_1}{1-q},\\ 192=\dfrac{b_1^3}{1-q^3}.\end{cases}$ Для решения этой системы возведем первое уравнение в куб: $64=\dfrac{b_1^3}{(1-q)^3}$ – и разделим второе уравнение системы на полученное уравнение: $3=\dfrac{(1-q)^3}{1-q^3}=\dfrac{(1-q)^2}{1+q+q^2}$ или $2q^2+5q+2=0$. Корни этого уравнения $q=-\dfrac{1}{2}$ и $q=-2$ (не подходит, так как прогрессия бесконечно убывающая и $|q|<1$). Теперь из первого уравнения находим $b_1=4(1-q)=4\cdot\dfrac{3}{2}=6$.

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии позволяет обращать десятичные бесконечные периодические дроби в обыкновенные.

Пример 14

Обратим десятичную дробь 0,(17) в обыкновенную.

Запишем дробь в виде $0,(17)=0,171717...=\dfrac{17}{100}+\dfrac{7}{10000}+...$. Таким образом, число 0,(17) является сумой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=\dfrac{7}{100}$ и $q=\dfrac{1}{100}$. Эта сумма равна $\dfrac{\frac{17}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{17}{99}$. Итак, $0,(17)=\dfrac{17}{99}$.

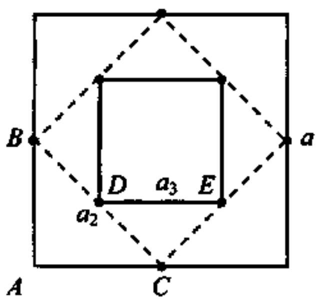
Заметим, что возможно и другое решение. Пусть дробь $0,(17)=x$, т. е. $x=0,1717...$. Учитывая, что период этой дроби содержит две цифры, умножим величину x на 100: $100x=17,1717...$. Вычтем из $100x$ величину x и получим: $100x-x=17,1717-0,1717=17$. Для нахождения x имеем линейное уравнение: $99x=17$, откуда $x=\dfrac{17}{99}$.

Пример 15

Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединим отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т. д. Найдем суммы сторон, периметров и площадей всех этих квадратов.

Обозначим стороны этих квадратов (начиная с данного): a, a_2, a_3, … . Рассмотрим прямоугольный равнобедренный ΔABC: $AB = AC = \frac{a}{2}$, $BC = a_2$. Запишем для него теорему Пифагора: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ или $a_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$, откуда $a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Аналогично из прямоугольного ΔDEC находим: $a_3 = \frac{a_2\sqrt{2}}{2}$ и т. д.



Таким образом, стороны квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \ldots$, у которой первый член a и знаменатель $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдем ее сумму: $\frac{a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$$= \frac{2a}{2-\sqrt{2}} = \frac{2a(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = a(2+\sqrt{2}) \approx 3{,}4a.$$

Так как периметр квадрата $4a$, то периметры приведенных квадратов также образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $4a$ и знаменателем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому ее сумма $4a(2+\sqrt{2})$.

Площадь квадрата a^2 и площади квадратов a^2; $\frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{4}$, ... образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и знаменателем $\frac{1}{2}$, поэтому сумма площадей $\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$.

Итак, сумма сторон $a(2+\sqrt{2})$, периметров – $4a(2+\sqrt{2})$, площадей – $2a^2$.

4. Характеристическое свойство геометрической прогрессии

Отметим еще одно важное свойство членов геометрической прогрессии. Квадрат любого члена прогрессии (начиная со второго) равен произведению соседних членов: $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ $(n \geq 2)$ (характеристическое свойство).

Пример 16

Докажем характеристическое свойство членов геометрической прогрессии.

Используя определение геометрической прогрессии, запишем: $b_{n-1}b_{n+1} = \left(\frac{b_n}{q}\right)\cdot(b_nq) = b_n^2$.

При решении задач часто используется характеристическое свойство геометрической прогрессии.

Пример 17

При каких значениях x числа: $(x-2)$; x; $(x+3)$ образуют геометрическую прогрессию?

Для решения этой задачи воспользуемся свойством геометрической прогрессии: квадрат члена прогрессии равен произведению членов с ним соседних. Так как ничего не сказано о порядке следования чисел, то в качестве среднего числа необходимо рассмотреть каждое из данных чисел.

а) Пусть $(x-2)$ – среднее по порядку число. Запишем свойство прогрессии: $(x-2)^2 = x(x+3)$, откуда $x = \frac{4}{7}$ и имеем прогрессии: $\frac{4}{7}$; $-\frac{10}{7}$; $\frac{25}{7}$ (знаменатель равен $-\frac{5}{2}$) или $\frac{25}{7}$; $-\frac{10}{7}$; $\frac{4}{7}$ (знаменатель равен $-\frac{2}{5}$).

б) Пусть x – среднее из чисел. Тогда $x^2 = (x-2)(x+3)$, откуда $x = 6$. Получаем прогрессии: 4; 6; 9 (знаменатель $\frac{3}{2}$) или 9; 6; 4 (знаменатель $\frac{2}{3}$).

в) Пусть $(x+3)$ – среднее из чисел. Тогда $(x+3)^2 = x(x-2)$, откуда $x = -\frac{9}{8}$. Находим прогрессии: $-\frac{9}{8}$; $\frac{15}{8}$; $-\frac{25}{8}$ (знаменатель $-\frac{5}{3}$) или $-\frac{25}{8}$; $\frac{15}{8}$; $-\frac{9}{8}$ (знаменатель $-\frac{3}{5}$).

Итак, при $x=-\frac{9}{8}$; $x=\frac{4}{7}$; $x=6$ данные числа образуют геометрическую прогрессию.

5. Прогрессии и банковские расчеты

В настоящее время в России сложилась разветвленная банковская система, которая, в частности, предлагает населению различные виды вкладов. Пусть в банк внесен вклад a руб. под p% годовых сроком на t лет. Получение дохода по вкладу возможно двумя способами:

1) ежегодное снятие процентов по вкладу в размере $a \cdot \frac{p}{100}$ руб.;

2) получение вклада вместе с процентами в конце срока хранения (капитализация вклада).

Разумеется, во втором случае доход от вклада будет больше, так как p% начисляется от постоянно увеличивающейся суммы вклада. Рассмотрим, как меняется вклад в каждом случае.

Сначала обсудим первый способ получения дохода. В конце каждого года за счет процентов добавляется $\frac{p}{100} \cdot a$ руб. Поэтому итоговая сумма денег в конце каждого составляет соответственно: $\left(a+\frac{p}{100}\cdot a\right)$ руб., $\left(a+\frac{2p}{100}\cdot a\right)$ руб., ..., $\left(a+\frac{tp}{100}\cdot a\right)$ руб. Итак, через t лет вместо начального вклада a руб. будет получено $a\left(1+\frac{tp}{100}\right)$ руб. – **формула простых процентов**. При этом ежегодно итоговая сумма увеличивается по закону **арифметической прогрессии**.

Рассмотрим второй способ получения дохода. В конце первого года получаемая сумма (как и в первом случае) составит $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб. При этом сумма вклада увеличится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз. Подобное увеличение вклада будет и в последующие годы: $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб., $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ руб., ..., $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ руб. Видно, что итоговая сумма возрастает по закону **геометрической** прогрессии. Итак, через t лет вместо первоначального вклада a руб. будет получено $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ руб. – **формула сложных процентов.**

Пример 18

Пусть сумма вклада a = 100000 руб., срок вклада t = 3 года, годовая ставка p = 5 %, 10 %, 20 %. Сравним итоговую сумму, получаемую по первому ($a\left(1+\frac{tp}{100}\right)$ руб.) и второму ($a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ руб.) способам. Эти суммы приведены в таблице.

p %	5	10	20
I способ	115000	130000	160000
II способ	115762	133100	172800
Разность	762	3100	12800

В последней строке приведена разность в доходах при получении их по второму и первому способам.

Пример 19

Пусть сумма вклада a = 100000 руб., годовая ставка p = 10%. Срок вклада t = 1, 2, 3 года. Сравним итоговую сумму, получаемую по первому и второму способам. Эти суммы приведены в таблице.

t %	1	2	3
I способ	110000	110000	130000
II способ	110000	121000	133100
Разность	0	1000	3100

Из двух последних примеров следует:

1) второй способ получения дохода (с капитализацией вклада) всего **более выгоден**, чем первый (что очевидно);

2) выгода использования второго способа становится тем больше, чем больше сумма первоначального вклада a, выше процентная ставка p и больше срок хранения вклада t.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение геометрической прогрессии.
2. Формула n-го члена геометрической прогрессии.
3. Характеристическое свойство геометрической прогрессии.
4. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
5. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
6. Формулы простых и сложных процентов.

V. Задание на уроках

§ 17, № 1 (а, б); 2; 10 (в); 13 (а); 15 (а, б); 16 (а); 17 (в, г); 22 (б); 26 (г); 28 (а); 33; 37 (а, б); 40 (а); 43; 48 (а, б); 51; 57.

VI. Задание на дом

§ 17, № 1 (в, г); 3; 10 (г); 13 (б); 15 (в, г); 16 (б); 17 (а, б); 22 (в); 26 (в); 28 (б); 34; 37 (в, г); 40 (б); 44; 48 (в, г); 52; 58.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 66–67. Смешанные задачи на прогрессии (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть задачи, в которые входят две прогрессии – арифметическая и геометрическая.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.
2. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

Вариант 2

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен –4. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

III. Изучение нового материала

Очень распространены задачи, в условиях которых говорится о двух прогрессиях: арифметической и геометрической. Как правило, для решения этих задач достаточно учесть характеристические свойства этих прогрессий.

Пример 1

Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найдем эти числа.

Пусть эти числа a, b, c. Так как они образуют арифметическую прогрессию, то выполнено соотношение (свойство арифметической прогрессии): $2b = a + c$. После сложения первого числа с числом 8 получаем числа $(a + 8)$, b, c, которые образуют геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $b^2 = (a + 8)c$. Кроме того, известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 26, т. е. $(a + 8) + b + c = 26$. Получаем для определения a, b, c систему уравнений: $\begin{cases} 2b = a + c, \\ b^2 = (a+8)c, \\ (a+8)+b+c = 26. \end{cases}$ Запишем третье уравнение системы в виде $(a + c) + b = 18$. Учитывая первое уравнение системы, получим: $b + 2b = 18$, $b = 6$. Тогда из первого и второго уравнений получаем систему для определения a и c: $\begin{cases} 12 = a + c, \\ 36 = (a+8)c. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения $c = 12 - a$ и подставив во второе, получим уравнение: $36 = (a + 8)\cdot(12 - a)$ или $a^2 - 4a - 60 = 0$. Корни этого уравнения $a = -6$ и $a = 10$. Соответствующие им числа $c = 18$ и $c = 2$. Таким образом, искомые числа –6, 6, 18 и 10, 6, 2.

Рассмотрим еще два способа решения этой задачи, которые позволяют уменьшить число неизвестных и сразу учесть свойство той или иной прогрессии.

Так как числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то можно записать: $b = a + d$, $c = a + 2d$ (где d – разность этой прогрессин). При этом учтено свойство арифметической прогрессии $2b = a + c$ (действительно, $2(a + d) = a + (a + 2d)$). После прибавления к первому числу числа 8 получаем числа $(a + 8)$, $(a + d)$, $(a + 2d)$, образующие геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $(a + d)^2 = (a + 8)(a + 2d)$. Сумма этих чисел равна 26, т. е. $(a + 8) + (a + d) + (a + 2d) = 26$. Имеем систему уравнений для определения a, d: $\begin{cases}(a+d)^2=(a+8)(a+2d),\\(a+8)+(a+d)+(a+2d)=26.\end{cases}$ Из второго уравнения $a + d = 6$, откуда $d = 6 - a$. Тогда из первого уравнения имеем: $36 = (a + 8)(12 - a)$, $a^2 - 4a - 60 = 0$. Решив это уравнение, найдем: $a = -6$ и $a = 10$. Тогда соответствующие значения d: $d = 12$ и $d = -4$. После этого находим числа: $a = -6$, $b = 6$, $c = 18$ и $a = 10$, $b = 6$, $c = 2$.

И наконец, третий способ решения позволяет учесть свойства геометрической прогрессии. Так как числа $(a + 8)$, b, c образуют геометрическую прогрессию, то можно записать $b = (a + 8)q$, $c = (a + 8)q^2$. При этом выполнено свойство геометрической прогрессии $b^2 = (a + 8)c$ (действительно, $[(a+8)q]^2=(a+8)[(a+8)q^2]$). Сумма этих чисел: $(a+8)+(a+8)q+(a+8)q^2=(a+8)(1+q+q^2)=26$. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, и можно записать ее свойство: $2(a+8)q=a+(a+8)q^2$. Прибавив к обеим частям уравнения 8 и перенеся слагаемое $2(a + 8)q$ из левой части в правую, получим: $8=(a+8)-2(a+8)q+(a+8)q^2$ или $8=(a+8)(1-2q+q^2)$. Для нахождения a и d имеем систему уравнений: $\begin{cases}(a+8)(1+q+q^2)=26,\\(a+8)(1-2q+q^2)=8.\end{cases}$ Разделив уравнения друг на друга, получим: $\dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\dfrac{13}{4}$ или $3q^2-10q+3=0$, откуда $q=\dfrac{1}{3}$, $q = 3$. Тогда, соответственно, находим из любого уравнения системы: $a = 10$ и $a = -6$. Далее определяем b и c: $b = 6$, $c = 2$ и $b = 6$, $c = 18$.

Пример 2

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получим геометрическую прогрессию. Найдем эти числа.

Разумеется, эту задачу можно решить любым из способов, разобранных в примере 1. Так как три числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде: a; aq; aq^2. После вычитания из последнего числа 4 получаем числа a; aq; (aq^2-4), образующие арифметическую прогрессию. На основании свойства арифметической прогрессии имеем: $2aq = a + (aq^2 - 4)$ или $4 = a(1-q)^2$. Если из второго и третьего членов этой арифметической прогрессии вычесть по единице, то получим числа a; $(aq-1)$; (aq^2-5), образующие геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $(aq-1)^2 = a(aq^2-5)$ или $1 = a(2q-5)$. Для определения a и q имеем систему уравнений: $\begin{cases} 4 = a(1-q)^2, \\ 1 = a(2q-5). \end{cases}$ Разделив уравнения друг на друга, получим: $4 = \dfrac{(1-q)^2}{2q-5}$ или $q^2 - 10q + 21 = 0$. Корни этого уравнения $q = 3$ и $q = 7$, тогда соответствующие значения: $a = 1$ и $a = \dfrac{1}{9}$.

Теперь находим сами числа: 1; 3; 9 и $\dfrac{1}{9}; \dfrac{7}{9}; \dfrac{49}{9}$.

Пример 3

Три числа, сумма которых 93, составляют геометрическую прогрессию. Эти числа можно также рассматривать как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найдем данные три числа.

Так как числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде b; bq; bq^2. Их сумма равна 93, и имеем первое уравнение: $b + bq + bq^2 = 93$. Первые два числа образуют арифметическую прогрессию и ее разность $d = bq - b$. Тогда легко записать седьмой член арифметической прогрессии: $b + 6(bq - b) = 6bq - 5b$. По условию задачи этот член равен третьему члену геометрической прогрессии bq^2. Получаем второе уравнение: $6bq - 5b = bq^2$ или $0 = q^2 - 6q + 5$, откуда $q = 1$ и $q = 5$. Тогда из первого уравнения находим b: $b = \dfrac{93}{1+q+q^2}$. Для $q = 1$ $b = 31$ и данные числа 31, 31; 31; при $q = 5$ $b = \dfrac{93}{1+5+5^2} = 3$ и числа: 3, 15, 75.

Итак, данные числа 31, 31, 31 и 3, 15, 75.

IV. Задание на уроках и дома

§ 17, № 53–56.

1) Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

2) Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить, соответственно, 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

3) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

4) Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

5) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

6) Сумма трех чисел, образующих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

7) Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

8) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что $|q| < 1$.

9) Три различных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $a + c$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответы: 1) 3; 6; 12; 18 и 18,75; 11,25; 6,75; 2,25; 2) 5103 и $\frac{7}{81}$; 3) 4; 8; 16 и $\frac{4}{25}; -\frac{16}{25}; \frac{64}{25}$; 4) 3; 6; 12 и 27; 18; 12; 5) –2; 6) 34; 20; 6; 7) $14-14\sqrt{2}; 14; 14+14\sqrt{2}$; 8) $2-\sqrt{3}$; 9) –2.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 68–69. Контрольная работа по теме «Прогрессии»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -18$ и $d = 4$.

2. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии 32, 29, 26, … .

3. Найдите сумму тридцати первых членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 3n + 2$.

4. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -64$ и $q = -\frac{1}{2}$.

5. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен 2, знаменатель равен 3. Найдите сумму пяти первых членов этой прогрессии.

6. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(24).

Вариант 2

1. Найдите семнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -17$ и $d = 5$.

2. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии 37, 33, 29, … .

3. Найдите сумму сорока первых членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 3n - 4$.

4. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -81$ и $q = -\frac{1}{3}$.

5. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен 3, знаменатель равен 2. Найдите сумму четырех первых членов этой прогрессии.

6. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(36).

Вариант 3

1. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -21$ и $a_{12} = 1$.

2. В арифметической прогрессии второй член равен 7, а сумма 22 первых членов равна 2035. Найдите первый член и разность прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее восемнадцатый член в 27 раз больше ее двадцать первого члена.

4. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,2(18).

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 7a_{n-1} + 2$, где $n \geq 2$ и $a_1 = 3$. Найдите третий член последовательности.

Вариант 4

1. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -37$ и $a_{20} = 1$.

2. В арифметической прогрессии второй член равен 3, а сумма 18 первых членов равна 1539. Найдите первый член и разность прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее десятый член в 8 раз больше ее тринадцатого члена.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,5(27).

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 6a_{n-1} + 1$, где $n \geq 2$ и $a_1 = 2$. Найдите четвертый член последовательности.

Вариант 5

1. Вычислите $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$.

2. Решите уравнение $(x + 1) + (x + 5) + (x + 9) + \ldots + (x + 157) = 3200$.

3. Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.

4. Сумма четырнадцатого и второго членов геометрической прогрессии равна 16, а сумма их квадратов равна 200. Найдите восьмой член прогрессии.

5. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $a + c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, где $n \geq 3$ и $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Найдите пятый член последовательности.

Вариант 6

1. Вычислите $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$.

2. Решите уравнение $(x + 3) + (x + 8) + (x + 13) + \ldots + (x + 248) = 6225$.

3. Найдите седьмой и четырнадцатый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 21, а произведение десятого и одиннадцатого членов этой прогрессии равно 98.

4. Сумма одиннадцатого и третьего членов геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 130. Найдите седьмой член прогрессии.

5. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a - b$, $b + c$, $b - c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$, где $n \geq 3$ и $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Найдите пятый член последовательности.

Урок 70. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. 38.
2. 186.
3. 1455.
4. –4.
5. 242.
6. $\frac{8}{33}$.

Вариант 2

1. 63.
2. –20.

3. 2300.

4. $\frac{1}{3}$.

5. 45.

6. $\frac{4}{11}$.

Вариант 3

1. 2.

2. $a_1 = -2$ и $d = 9$.

3. $\frac{1}{3}$.

4. 189 и 63.

5. $\frac{12}{55}$.

6. 163.

Вариант 4

1. 2.

2. $a_1 = -8$ и $d = 11$.

3. $\frac{1}{2}$.

4. 728 и 364.

5. $\frac{29}{55}$.

6. 475.

Вариант 5

1. Сгруппируем слагаемые и используем формулу разности квадратов. Получаем:

$(50^2 - 49^2) + (48^2 - 47^2) + \ldots + (2^2 - 1^2) = (50 + 49) \cdot (50 - 49) + (48 + 47) \cdot (48 - 47) + \ldots + (2 + 1) \cdot (2 - 1) = 99 + 95 + \ldots + 3 = \frac{(99+3)\cdot 25}{2} = 1275$. Учтено, что 25 слагаемых 99, 95, ..., 3 являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: 1275.

2. Данные числа образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1 = x + 1$ и $d = 4$. Тогда n-й член прогрессии $a_n = x + 1 + 4(n-1) = x + 4n - 3$. Найдем число слагаемых в сумме.

Получаем уравнение: $x + 157 = x + 4n - 3$, откуда $n = 40$. Запишем данную сумму: $\frac{2(x+1)+4\cdot 39}{2}\cdot 40 = 3200$ или $40 + x = 80$, откуда $x = 40$.

Ответ: 40.

3. Запишем условия задачи: $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ b_{14}\cdot b_2 = 60, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ (b_6q^8)\cdot\frac{b_{10}}{q^8} = 60, \end{cases}$

или $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ b_6\cdot b_{10} = 60. \end{cases}$ Решения этой симметричной системы уравнений: $b_6 = 6$, $b_{10} = 10$ и $b_6 = 10$, $b_{10} = 6$.

Ответ: $b_6 = 6$, $b_{10} = 10$ и $b_6 = 10$, $b_{10} = 6$.

4. По условиям задачи получаем симметричную систему уравнений: $\begin{cases} b_{14} + b_2 = 16, \\ b_{14}^2 + b_2^2 = 200 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_{14}^2 + 2b_{14}b_2 + b_2^2 = 256, \\ b_{14}^2 + b_2^2 = 200, \end{cases}$ откуда

$b_{14}b_2 = 28$. Запишем это равенство в виде $b_8q^6\cdot\frac{b_8}{q^6} = 28$ или $b_8^2 = 28$ и

$b_8 = \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7}$.

Ответ: $\pm 2\sqrt{7}$.

5. Так как числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b = aq$ и $c = aq^2$. Тогда числа $a + b$, $b + c$ и $a + c$ образуют арифметическую прогрессию. Запишем ее характеристическое свойство: $2(b+c) = (a+b)+(a+c)$, или $0 = 2a - b - c$, или $0 = 2a - aq - aq^2$, или $0 = q^2 + q - 2$, откуда $q = 1$ (не подходит, так как числа a, b, c разные) и $q = -2$.

Ответ: -2.

6. Запишем рекуррентную формулу $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (где $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$) для:

$n = 3$: $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 = -1$;

$n = 4$: $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3\cdot(-1) - 2\cdot 1 = -5$;

$n = 5$: $a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3\cdot(-5) - 2\cdot(-1) = -13$.

Ответ: -13.

Вариант 6

1. Сгруппируем слагаемые и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \ldots + (99^2 - 100^2) = (1 - 2)\cdot(1 + 2) + (3 - 4)\cdot(3 + 4) + \ldots + (99 - 100)\cdot(99 + 100) = -3 - 7 - \ldots - 199 =$

$= \dfrac{(-3-199)\cdot 50}{2} = -5050$. Учтено, что 50 слагаемых $-3, -7, \ldots, -199$ являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: -5050.

2. Данные числа образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1 = x + 3$ и $d = 5$. Тогда n-й член прогрессии $a_n = x+3+5(n-1) = x+5n-2$. Найдем число слагаемых в сумме. Получаем уравнение: $x + 248 = x + 5n - 2$, откуда $n = 50$. Запишем данную сумму: $\dfrac{2(x+3)+5\cdot 49}{2}\cdot 50 = 6225$ или $2x + 251 = 249$, откуда $x = -1$.

Ответ: -1.

3. Запишем условия задачи: $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ b_{10}\cdot b_{11} = 98, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ (b_7\cdot q^3)\cdot \dfrac{b_{14}}{q^3} = 98, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ b_7\cdot b_{14} = 98. \end{cases}$ Решения этой симметричной системы уравнений: $b_7 = 7$, $b_{14} = 14$ и $b_7 = 14$, $b_{14} = 7$.

Ответ: $b_7 = 7$, $b_{14} = 14$ и $b_7 = 14$, $b_{14} = 7$.

4. По условиям задачи получаем симметричную систему уравнений: $\begin{cases} b_{11} + b_3 = 14, \\ b_{11}^2 + b_3^2 = 130 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_{11}^2 + 2b_{11}b_3 + b_3^2 = 196, \\ b_{11}^2 + b_3^2 = 130, \end{cases}$ откуда $b_{11}b_3 = 33$. Запишем это равенство в виде $b_7\cdot q^4\cdot \dfrac{b_7}{q^4} = 33$ или $b_7^2 = 33$ и $b_7 = \pm\sqrt{33}$.

Ответ: $\pm\sqrt{33}$.

5. Так как числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b = aq$ и $c = aq^2$. Тогда числа $a - b$, $b + c$ и $b - c$ образуют арифметическую прогрессию. Запишем ее характеристическое свойство: $2(b+c) = (a-b)+(b-c)$, или $0 = a - 2b - 3c$, или $0 = a - 2aq - 3aq^2$, или $0 = 3q^2 + 2q - 1$, откуда $q = -1$ (не подходит, так как числа a, b, c положительные) и $q = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

6. Запишем рекуррентную формулу $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ (где $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$) для:

$n = 3$: $a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$;
$n = 4$: $a_4 = 2a_3 - 3a_2 = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 1 = -11$;
$n = 5$: $a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2 \cdot (-11) - 3 \cdot (-4) = -10$.
Ответ: -10.

Уроки 71–72. Зачетная работа по теме «Прогрессии»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Является ли число 54,5 членом арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 25{,}5$ и $a_9 = 5{,}5$?

2. Найдите девятый член арифметической прогрессии, разность которой равна ее десятому члену.

3. Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 60 до 110 включительно.

4. В геометрической прогрессии $b_8 = 2^{-12}$ и $b_{10} = 2^{-14}$. Найдите b_1.

5. Пятый член геометрической прогрессии в 5 раз больше ее первого члена. Во сколько раз тринадцатый член этой прогрессии больше ее пятого члена?

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен -4. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

7. Найдите сумму чисел $5; 3; \frac{9}{5}; \ldots$.

В

8. Докажите, что не существует арифметической прогрессии с разностью 19, состоящей только из простых чисел.

9. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

10. Между числами 3 и 12 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

11. Найдите x, если известно, что числа $x-3$, $\sqrt{5x}$, $x+16$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.

C

12. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 36, поместили 11 чисел так, что эти 13 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.

13. Найдите произведение двенадцатого, семнадцатого, двадцать второго и двадцать седьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение десятого и двадцать девятого ее членов равно 22.

14. Три числа образуют убывающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 36.

Вариант 2

A

1. Является ли число 30,4 членом арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 11{,}6$ и $a_{15} = 17{,}2$?

2. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, разность которой равна ее восьмому члену.

3. Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 50 до 120 включительно.

4. В геометрической прогрессии $b_{12} = 3^{15}$ и $b_{14} = 3^{17}$. Найдите b_1.

5. Четвертый член геометрической прогрессии в 4 раза больше ее первого члена. Во сколько раз десятый член этой прогрессии больше ее четвертого члена?

6. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

7. Найдите сумму чисел $10;\ 4;\ \frac{8}{5};\ \ldots$.

B

8. Докажите, что не существует арифметической прогрессии с разностью 17, состоящей только из простых чисел.

9. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с сорокового по пятидесятый включительно, если $a_n = 4n + 2$.

10. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

11. Найдите x, если известно, что числа $x-2$, $\sqrt{6x}$, $x+5$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.

С

12. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 42, поместили 5 чисел так, что эти 7 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.

13. Найдите произведение одиннадцатого, двадцатого, двадцать девятого и тридцать восьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение восемнадцатого и тридцать первого ее членов равно 29.

14. Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. Нет.
2. 0.
3. 4335.
4. $\pm\frac{1}{32}$.
5. В 25 раз.
6. −153.
7. 12,5.
8. Доказано.
9. 1210.
10. $3;\ 3\sqrt{2};\ 6;\ 6\sqrt{2};\ 12$ и $3;\ -3\sqrt{2};\ 6;\ -6\sqrt{2};\ 12$.
11. 4.

12. Пусть первый член данной прогрессии a, тогда второй член $(a + 36)$. Этот член является 13-м членом новой прогрессии с разностью d. Получаем уравнение: $a + 36 = a + 12d$, откуда $d = 3$.

Ответ: 3.

13. Произведение десятого и двадцать девятого членов геометрической прогрессии: $(b_1q^9)\cdot(b_1q^{28}) = b_1^2q^{37} = 22$. Запишем произведение требуемых членов: $(b_1q^{11})\cdot(b_1q^{16})\cdot(b_1q^{21})\cdot(b_1q^{26}) = b_1^4q^{74} =$ $= (b_1^2q^{37})^2 = 22^2 = 484$.

Ответ: 484.

14. Пусть даны числа a, $a + d$, $a + 2d$ (где a – первое число, d – разность арифметической прогрессии). Их сумма $a + (a + d) + (a + 2d) = 36$ или $a + d = 12$. Учтем, что квадраты чисел составляют геометрическую прогрессию. Запишем ее характеристическое

свойство: $(a + d)^4 = a^2(a + 2d)^2$. Выразим $a = 12 - d$ и подставим в это уравнение: $12^4 = (12 - d)^2(12 + d)^2$ или $144^2 = (144 - d^2)^2$. Так как арифметическая прогрессия убывающая, то $d < 0$. Получаем уравнение: $-144 = 144 - d^2$, $d^2 = 288$, откуда $d = -12\sqrt{2}$ и $a = 12 + 12\sqrt{2}$. Найдем данные числа: $12+12\sqrt{2}$; 12; $12-12\sqrt{2}$.

Ответ: $12+12\sqrt{2}$; 12; $12-12\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. Да.
2. 0.
3. 6745.
4. 3.
5. В 16 раз.
6. 3280.
7. $\frac{50}{3}$.
8. Доказано.
9. 2002.
10. 2; $2\sqrt{3}$; 6; $6\sqrt{3}$; 18 и 2; $-2\sqrt{3}$; 6; $-6\sqrt{3}$; 18.
11. 5.
12. Пусть первый член данной прогрессии a, тогда второй член $(a + 42)$. Этот член является 7-м членом новой прогрессии с разностью d. Получаем уравнение: $a + 42 = a + 6d$, откуда $d = 7$.

Ответ: 7.

13. Произведение восемнадцатого и тридцать первого членов геометрической прогрессии: $(b_1q^{17})\cdot(b_1q^{30}) = b_1^2q^{47} = 29$. Запишем произведение требуемых членов: $(b_1q^{10})\cdot(b_1q^{19})\cdot(b_1q^{28})\cdot(b_1q^{37}) = b_1^4q^{94} = (b_1^2q^{47})^2 = 29^2 = 841$.

Ответ: 841.

14. Пусть даны числа a, $a + d$, $a + 2d$ (где a – первое число, d – разность арифметической прогрессии). Их сумма $a + (a + d) + (a + 2d) = 42$ или $a + d = 14$. Учтем, что квадраты чисел составляют геометрическую прогрессию. Запишем ее характеристическое свойство: $(a + d)^4 = a^2(a + 2d)^2$. Выразим $a = 14 - d$ и подставим в это уравнение: $14^4 = (14 - d)^2(14 + d)^2$ или $196^2 = (196 - d^2)^2$. Так как арифметическая прогрессия возрастающая, то $d > 0$. Получаем уравнение: $-196 = 196 - d^2$, $d^2 = 392$, откуда $d = 14\sqrt{2}$ и $a = 14 - 14\sqrt{2}$. Найдем данные числа: $14-14\sqrt{2}$; 14; $14+14\sqrt{2}$.

Ответ: $14-14\sqrt{2}$; 14; $14+14\sqrt{2}$.

Глава 5
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Уроки 73–75. Комбинаторные задачи

Цель: рассмотреть простейшие комбинаторные задачи.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

По мнению авторов, изучение этой темы в средней школе (а тем более в 9 классе) *нецелесообразно* по следующим причинам:

1) комбинаторика, статистика и теория вероятностей являются изолированными разделами математики, имеют своеобразные логику и методы решения задач;

2) эта тема практически не связана с изучаемым курсом алгебры, не подкреплена повседневной практикой и будет очень быстро забыта;

3) для более или менее осмысленного и логичного изучения таких разделов математики времени явно недостаточно (и взять его неоткуда);

4) даже далеко не в каждом техническом вузе необходимо изучение этих дисциплин;

5) вряд ли средний девятиклассник в состоянии освоить эту тему (надо смотреть правде в глаза). Поэтому разумнее потратить время, отведенное на такие разделы, для более детального изучения основного курса алгебры 9 класса (здесь ситуация весьма далека от идеальной).

В силу перечисленных доводов многие учителя (и не только 9 класса) игнорируют изучение этих разделов математики. Тем не менее такая тема входит в программу 9 класса и ее необходимо рассмотреть.

Комбинаторикой называют область математики, изучающую вопросы о числе различных наборов (удовлетворяющих тем или иным условиям), которые можно составить из данных элементов. Первоначально комбинаторика (и теория вероятностей) возникла в XVI в. в связи с распространением азартных игр (кости, карты и т. д.). В настоящее время комбинаторика используется в теории информации (кодировка и декодировка), линейном программировании (составление расписаний уроков, перевозок) и т. д.

В случае **небольшого количества элементов** определить число всевозможных комбинаций несложно. Для этого рассматривают все возможные варианты, т. е. используют **метод перебора вариантов**. Причем необходимо, чтобы такой перебор был логично организован.

Пример 1

Из цифр 3, 5, 7 составим все возможные трехзначные числа с различными цифрами и определим количество таких чисел.

Поставим, например, на первое место цифру 3. Тогда второй цифрой может быть или 5, или 7, поэтому получаем два трехзначных числа: 357 и 375.

Теперь на первое место поместим цифру 5. Второй цифрой может быть или 3, или 7. Тогда имеем еще два трехзначных числа: 537 и 573.

Наконец на первое место ставим цифру 7. Второй цифрой может быть или 3, или 5. Получаем еще два трехзначных числа: 735 и 753.

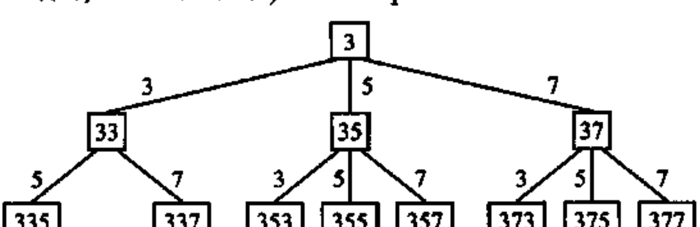
Из алгоритма построения чисел понятно, что других трехзначных чисел с цифрами 3, 5, 7 (и без их повторения) не существует. Поэтому получаем шесть трехзначных чисел, удовлетворяющих условию: 357, 375, 537, 573, 735, 753.

Усложним рассмотренную задачу.

Пример 2

Из цифр 3, 5, 7 составим все трехзначные числа, в которых ни одна цифра не повторяется более двух раз. Определим количество таких чисел.

Как и в предыдущей задаче, переберем все возможные варианты. При этом упорядочим такой процесс, построив **дерево возможных вариантов**. Пусть первая цифра числа 3. Второй цифрой числа может быть цифра 3, или 5, или 7. При этом задача разветвляется на три направления. Получаем двузначные числа 33, 35, 37. Для двузначного числа 33 третьей цифрой может быть или 5, или 7 (цифра 3, очевидно, быть не может). Имеем трехзначные числа 335 и 337.



Для двузначных чисел 35 и 37 третьей цифрой будет или 3, или 5 или 7. Получаем два набора трехзначных чисел: 353, 355, 357 или 373, 375, 377. Всего имеем 8 трехзначных чисел с первой цифрой 3.

Если первая цифра 5 или 7, то рассуждения полностью аналогичны приведенным. В каждом из этих случаев также получаем 8 трехзначных чисел. Таким образом, условиям задачи удовлетворяют $8 \cdot 3 = 24$ трехзначных числа.

Разумеется, можно рассуждать и другим способом. Пусть по-прежнему первая цифра 3. Тогда трехзначные числа без повторения цифр 357 и 375. Трехзначные числа, в которых повторяется цифра 3, 335, 337, 353, 373. Число, в котором повторяется цифра 5, только одно: 355. Число, в котором повторяется цифра 7, также одно: 377. Таким образом, всего получаем $2 + 4 + 1 + 1 = 8$ трехзначных чисел с первой цифрой 3. Аналогично можно рассуждать, если первая цифра числа 5 или 7. В каждом из этих случаев также получаем по восемь чисел. Всего условиям задачи удовлетворяют $8 \cdot 3 = 24$ трехзначных числа.

Разумеется, перебор вариантов и построение дерева возможных вариантов используются лишь для сравнительно небольшого числа комбинаций. Если таких комбинаций много, то перечислить их затруднительно, но можно подсчитать их количество. Для этого используют **правило умножения.**

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Пример 3

Найдем количество различных трехзначных чисел, содержащих цифры 3, 5, 7 и не имеющих одинаковых цифр (см. пример 1).

Очевидно, что первой цифрой может быть одна из трех (3, 5 или 7), например цифра 3 (три исхода). Тогда второй цифрой будет одна из двух оставшихся: 5 или 7 (два исхода). Третьей цифрой будет оставшаяся цифра (один исход). В соответствии с правилом умножения получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов. Поэтому есть только шесть трехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи (что согласуется с результатами примера 1).

Пример 4

В 9 классе изучают 9 предметов. В среду должны быть проведены 5 различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание занятий на среду?

Очевидно, что первым уроком будет один из изучаемых 9 предметов, и мы его выбрали (9 исходов). Тогда вторым уроком может быть поставлен один из 8 оставшихся предметов (8 исходов) и т. д. Поэтому по правилу умножения получаем 9 · 8 · 7 · 6 · 5 = 15 120 вариантов. Таким образом, при условиях задачи расписание при условиях задачи можно составить 15 120 способами.

Пример 5

В четверг в 9 классе пять уроков: алгебра, физика, литература, биология и химия. Сколько вариантов расписания можно составить на четверг?

По аналогии с предыдущим примером первым уроком можно поставить один из 5 предметов (например, физику). Тогда вторым уроком будет один из 4 оставшихся предметов (например, алгебра) и т. д. По правилу умножения имеем 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 вариантов составления расписания.

Обсудим детальнее примеры 4 и 5. Видно, что даже несложные задачи комбинаторики приводят к огромному количеству вариантов. Очевидно, что перебрать их невозможно (пример 4). Однако, используя правило умножения, легко посчитать их количество. Как правило, такие расчеты связаны с понятием **факториала**.

Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают символом $n!$ и называют «эн факториал», т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ (см. пример 5). При этом $1! = 1$. Очевидно, что выполняются равенства: $n! = (n-1)! \cdot n$; $n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$; $n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ и т. д.

Пример 6

Вычислим: а) $7!$; б) $\frac{7! \cdot 3!}{6! \cdot 4!}$; в) $\frac{8!}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 6!}$.

Используя понятие факториала и его простейшие свойства, получим:

а) $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ (непосредственное вычисление);

б) $\frac{7! \cdot 3!}{6! \cdot 4!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 3!}{6! \cdot 3! \cdot 4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$;

в) $\frac{8!}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot (n+1)!}{(n-1)! \cdot n(n+1) 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = 7 \cdot 8 = 56$

(где $n \in N$ и $n \geq 2$).

Пример 7

Упростим выражение $\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n^3 - n}{(n+1)!}$.

Сначала сократим вторую дробь: $\dfrac{n^3-n}{(n+1)!}=\dfrac{n(n^2-1)}{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n(n+1)}=$

$=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{(n-2)!(n-1)\cdot n(n+1)}=\dfrac{1}{(n-2)!}$. Тогда данное выражение

$\dfrac{1}{(n-2)!}-\dfrac{n^3-n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{(n-2)!}-\dfrac{1}{(n-2)!}=0.$

Пример 8

Решим уравнение $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{6}$ (где $n\in N$ и $n\geq 2$).

Упростим левую часть уравнения, используя определение факториала: $\dfrac{(n-1)!\cdot n-(n-1)!}{(n-1)!\cdot n(n+1)}=\dfrac{1}{6}$, или $\dfrac{(n-1)!\cdot(n-1)}{(n-1)!\cdot n(n+1)}=\dfrac{1}{6}$, или

$\dfrac{n-1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{6}$, или $0=n^2-5n+6$. Корни этого квадратного уравнения $n=2$ и $n=3$ действительно являются натуральными числами и решениями данного уравнения.

Еще раз вернемся к примеру 5, с которым связано понятие **перестановок.**

Комбинации, каждая из которых содержит n различных элементов, взятых в определенном порядке, называют **перестановками из *n* элементов.** Другими словами, имеется n позиций (мест), которые надо заполнить n различными элементами. Число P_n всевозможных перестановок из n элементов вычисляют по формуле $P_n=n!$.

n мест

В примере 5 мы имеем именно такую ситуацию. Если пронумеровать порядок уроков: 1, 2, 3, 4, 5, то пять изучаемых предметов (алгебра, физика, литература, биология, химия) надо разместить на эти позиции. При каждом варианте получаем некоторую перестановку. Число таких перестановок $P_5=5!=120$.

Пример 9

Сколько различных пятизначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Из пяти цифр можно составить P_5 перестановок (чисел). Часть из них начинается с нуля. Число таких перестановок P_4. Так как первая цифра в числе не может быть нулем, то количество истинно пятизначных чисел (начинающихся с цифр 1, 2, 3, 4) равно: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4! \cdot (5-1) = 4! \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$.

Пример 10

Имеется десять различных книг, четыре из которых – задачники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все задачники стояли рядом?

Так как задачники должны стоять рядом, то будем рассматривать их как одну книгу. Тогда на полке надо расставить $10 - 4 + 1 = 7$ книг. Это можно сделать P_7 способами. Для каждой из полученных комбинаций можно сделать P_4 перестановок задачников. Поэтому по правилу умножения число способов расположения книг на полке равно произведению $P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 24 = 120\,960$.

Заметим, что мы затронули самые *азы* комбинаторики и рассмотрели самые простые комбинации элементов – перестановки. Изучаются также два других вида соединений: размещения и сочетания.

Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит k элементов, взятых из n различных элементов, называют **размещениями из n элементов по k** ($k < n$). Другими словами, из n элементов выбирают k элементов и размещают их на k позиций. Число размещений из n элементов по k обозначают символом A_n^k (читают: A из n по k) и вычисляют по формуле $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 11

Вычислим: а) A_6^2; б) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$.

Используя формулу для A_n^k, найдем:

а) $A_6^2 = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$;

б) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3} = \left(\dfrac{12!}{8!} - \dfrac{11!}{7!}\right) : \dfrac{10!}{7!} = (9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 - 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11) : (8 \cdot 9 \cdot 10) =$

$= \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11(12-8)}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \dfrac{11 \cdot 4}{8} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5.$

Пример 12

Решим уравнение $A_n^3 + 3A_n^2 = \dfrac{1}{2}P_{n+1}$.

Используем формулы для числа размещений и числа перестановок и получим уравнение: $\frac{n!}{(n-3)!}+3\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-2)(n-1)n+$ $+3(n-1)n=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-1)n(n-2+3)=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $2(n-1)n(n+1)=(n+1)!$, или $2=(n-2)!$. Очевидно, что $n-2=2$ и $n=4$.

Пример 13

Сколько трехзначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

По определению размещений из шести цифр можно составить A_6^3 трехзначных чисел. Это количество равно $A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=$ $=4\cdot5\cdot6=120$. Поэтому можно составить 120 трехзначных чисел.

Также в комбинаторике рассматривают еще один вид соединений – **сочетания**. Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит k элементов, выбранных из n различных элементов, называют **сочетаниями из n элементов по k**. **Порядок** следования элементов **неважен**. Число сочетаний из n элементов по k обозначают символом C_n^k (читают: C из n по k) и вычисляют по формуле $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 14

Вычислим: а) C_7^2; б) $2C_{n+2}^2-\frac{P_{n+2}}{P_n}$.

Используем формулу для числа сочетаний и найдем:

а) $C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!\cdot5!}=\frac{5!\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot5!}=3\cdot7=21$;

б) $2C_{n+2}^2-\frac{P_{n+2}}{P_n}=2\frac{(n+2)!}{n!\cdot2!}-\frac{(n+2)!}{n!}=(n+1)(n+2)-(n+1)(n+2)=0.$

Пример 15

Найдем натуральные значения n, удовлетворяющие условию $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4}=\frac{6}{5}$.

Используем формулу для числа сочетаний и получим уравнение: $\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}:\frac{n!}{4!(n-4)!}=\frac{6}{5}$, или $\frac{(n+1)!\cdot4!\cdot(n-4)!}{3!\cdot(n-2)!\cdot n!}=\frac{6}{5}$, или

$\frac{(n+1)\cdot 4}{(n-3)(n-2)}=\frac{6}{5}$, или $0=3n^2-25n+8$. Корни этого квадратного уравнения $n=\frac{1}{3}$ (не натуральное число) и $n=8$.

Пример 16

У Оли есть 8 разных книг по химии, у Олега 10 книг по физике. Сколькими способами они могут обменяться шестью книгами?

Ольга может выбрать шесть книг из восьми $C_8^6=\frac{8!}{6!2!}=28$ способами. Независимо от нее Олег может подобрать шесть книг из десяти $C_{10}^6=\frac{10!}{6!4!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210$ способами. По правилу умножения находим число вариантов обмена: $C_8^6\cdot C_{10}^6=28\cdot 210=5880$.

До сих пор рассматривались соединения с **различными *n* элементами**. Но некоторые из этих элементов могут быть и одинаковыми. Тогда все приведенные формулы для числа перестановок, числа размещений и числа сочетаний **меняются**. Для иллюстрации рассмотрим, например, перестановки с одинаковыми элементами.

Перестановки из n элементов, в каждую из которых входят n_1 одинаковых элементов первого типа, n_2 одинаковых элементов второго типа, ..., n_k одинаковых элементов k-го типа (при этом n_1+n_2+ $+\ldots+n_k=n$), называют **перестановками из *n* элементов с повторениями.** Число таких перестановок вычисляют по формуле $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

Пример 17

Сколькими способами можно расположить в ряд три зеленых, пять красных и восемь желтых лампочек?

Всего имеется $n=3+5+8=16$ лампочек. По приведенной формуле их можно расположить $C_{16}(3, 5, 8)=\frac{16!}{3!\cdot 5!\cdot 8!}=$ $=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=102960$ способами.

III. Контрольные вопросы

1. Соединение из n элементов по k.
2. Перечислите три вида соединений.
3. Определение перестановок из n элементов.

4. Понятие факториала ($n!$).

5. Число перестановок P_n из n элементов.

6. Определение размещений из n элементов по k.

7. Формула для вычисления числа размещений A_n^k.

8. Сочетания из n элементов по k.

9. Число C_n^k сочетаний из n элементов по k.

10. Перестановки из n элементов с повторениями.

11. Число $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ перестановок из n элементов с повторениями.

IV. Задание на уроках

§ 18, № 1; 3; 5; 7; 10; 11 (в, г); 13 (а, б); 14 (в); 15 (а, б); 16; 19; 22; 25 (а, б).

V. Задание на дом

§ 18, № 2; 4; 6; 8; 9; 12 (в, г); 13 (в, г); 14 (г); 15 (в, г); 17; 20; 23; 25 (в, г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 76–77. Статистика – дизайн информации

Цель: рассмотреть статистическую обработку информации и ее основные характеристики.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 3, 4, 8?

2. Из 24 участников собрания надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. Миша имеет восемь, а Витя – семь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться пятью конфетами?

Вариант 2

1. Сколько различных трехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 4, 5?

2. Из 28 спортсменов надо выбрать капитана команды и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

3. Коля имеет девять, а Леша – восемь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться шестью конфетами?

III. Изучение нового материала

Наш XXI в. характеризуют различным образом: век генной инженерии, век новых технологий (в частности, нанотехнологий), век астрофизики (проверка основополагающих космогонических теорий, большой андронный коллайдер) и т. д. Если вдуматься, все определения объединяет, прежде всего, получение принципиально новой информации. Поэтому правильнее назвать наш век веком информации. Буквально за несколько последних лет появились сверхмощные компьютеры, Интернет, различные поисковые системы, разрабатываются и совершенствуются методики обработки информации и т. п.

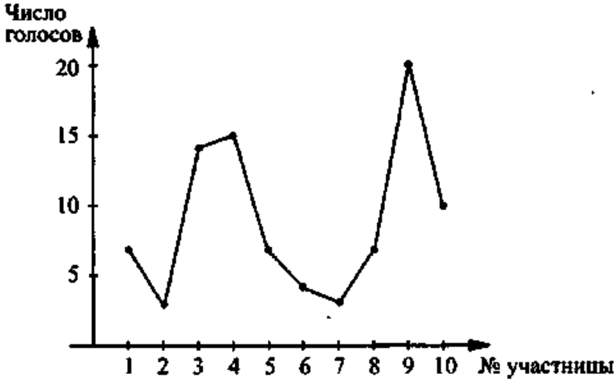
Многие из нас участвуют в переписи населения, выборах, опросах и т. д. При этом появляется определенная информация. Задача статистики – **отражение** этой **информации** и ее **обработка**. Для этого необходимо ввести некоторые статистические характеристики. Рассмотрим следующий пример.

Пример

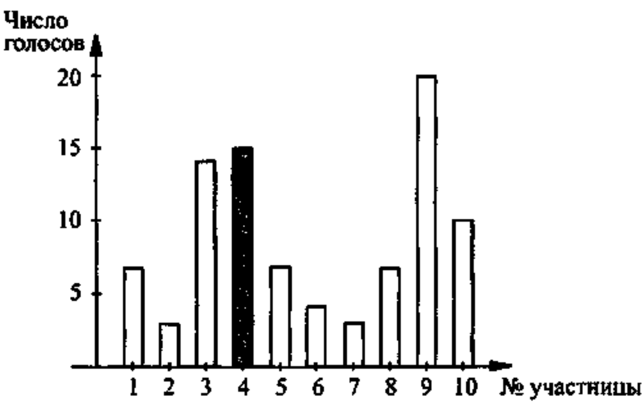
В финал конкурса «Мисс факультета» вышли 10 студенток, за которых болели и голосовали 90 студентов. В таблице приведены результаты голосования за участниц с номерами 1–10. Прежде всего возникает вопрос о наглядном отражении результатов голосования. Из алгебры вы знаете, что графическая информация нагляднее табличной. Поэтому применяют три вида графического отражения информации – диаграммы.

№ участницы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число голосов	7	3	14	15	7	4	3	7	20	10

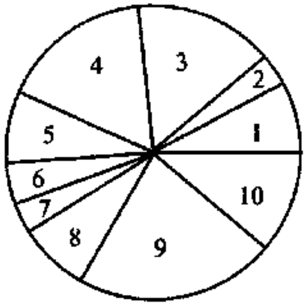
Первый вид диаграммы – **линейная диаграмма** (или многоугольник распределения) строится как обычный график. По оси абсцисс откладываются номера участниц, по оси ординат – число голосов, отданных за данную участницу, т. е. точки (1; 7), (2; 3); (3; 14) и т. д. Для наглядности отмеченные точки соединены отрезками.



Второй вид диаграммы – **столбчатая диаграмма** (или гистограмма распределения) строится следующим образом. В окрестности каждой отмеченной точки по оси абсцисс строят прямоугольник, высота которого равна соответствующей ординате. При этом обычно ширину прямоугольников делают одинаковой. Достаточно часто прямоугольники изображаются таким образом, что два соседних имеют общую сторону. При этом прямоугольники могут штриховаться (см. учебник).



Третья диаграмма – **круговая** (или камамбер, по названию французского сыра) представляет собой круг, разделенный на 10 секторов с различными центральными углами. Так как всего было подано 90 голосов, то каждому голосу соответствует $360° : 90 = 4°$. Далее легко пересчитать углы секторов. Например, для первой участницы строим сектор с углом $4° \cdot 7 = 28°$. Каждый сектор маркируется номером соответствующей участницы.



На практике применяют все три вида диаграмм. Итак, на конкретном примере были рассмотрены основные этапы простейшей статистической обработки данных:

1. Систематизация, упорядочивание и группировка.
2. Составление таблицы распределения данных.
3. Построение диаграммы распределения данных (любого вида).
4. Паспорт данных измерения (основные характеристики информации).

Обсудим некоторые характеристики рассматриваемого примера.

Объем измерения – количество источников информации (т. е. число опрошенных или число голосов). В данном случае 90.

Размах измерения – разница между наибольшим и наименьшим значениями результатов измерения. В данном случае $20 - 3 = 17$, так как наибольшее число поданных голосов 20, наименьшее – 3.

Мода измерения – наиболее часто встречающийся результат. В данном случае 9, так как за участницу № 9 было подано 20 голосов (наибольшее количество).

Среднее (или среднее арифметическое) – частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Обычно его вычисляют после составления таблицы распределения. В данном случае получают: $\dfrac{1\cdot7+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot15+5\cdot7+6\cdot4+7\cdot3+8\cdot7+9\cdot20+10\cdot10}{90}=$

$$=\frac{7+6+42+60+35+24+21+56+180+100}{90}=\frac{531}{90}=5{,}9.$$

Обычно результатами измерений являются некоторые числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют **вариантой измерения**. В конкретном измерении его варианты могут быть никак не связаны (например, билетики с результатами голосования). Однако обычно результаты обрабатываются. Если записать все варианты измерения в некотором порядке (например, по времени поступления голосов в жюри), то получится **ряд данных** изме-

рения. Обычно упорядочивание происходит определенным образом. Запишем полученные варианты в порядке их возрастания (точнее, неубывания). Получим **сгруппированный ряд данных**:
$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{7}$; $\underbrace{2, 2, 2}_{3}$; $\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{14}$; $\underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{15}$; $\underbrace{5, 5, \ldots, 5}_{7}$; $\underbrace{6, 6, \ldots, 6}_{4}$;
$\underbrace{7, 7, 7}_{3}$; $\underbrace{8, 8, \ldots, 8}_{7}$; $\underbrace{9, 9, \ldots, 9}_{20}$; $\underbrace{10, 10, \ldots, 10}_{10}$.

Среднюю варианту в сгруппированном ряде данных в случае нечетного количества чисел или среднее арифметическое двух стоящих посередине вариант в случае четного количества чисел называют **медианой измерения**. В нашем случае средних варианты две, это варианты 45 и 46. Каждая из них равна 5, значит, и медиана равна $\frac{5+5}{2} = 5$.

В нашем примере ответ 1 встретился 7 раз (за участницу № 1 проголосовали 7 человек). Поэтому говорят, что **абсолютная частота** (или кратность) варианты 1 равна семи. Поэтому (в другой терминологии) ранее приведенная таблица имеет вид:

Варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
Кратность	7	3	14	15	7	4	3	7	20	10	90

Таким образом, получаем **таблицу распределения** данных измерения. Графа «Сумма» добавляется для контроля: число в этой графе обязательно равняется объему измерения.

Заметим, что при вычислении среднего арифметического в неявном виде уже использовалось понятие кратности варианты.

Введем еще понятие **частоты** данной **варианты** – частное от деления кратности варианты на объем измерения. Например, для варианты 1 находим частоту $\frac{7}{90} \approx 0{,}078$. Частоту варианты можно выразить **в процентах**. Тогда получим: $\frac{7}{90} \cdot 100 = \frac{70}{9} \approx 7{,}8\%$.

IV. Контрольные вопросы

1. Основные задачи статистики.
2. Виды диаграмм распределения и их построение.
3. Объем измерения.
4. Понятие размаха измерения.
5. Мода измерения.
6. Среднее арифметическое.

7. Понятие медианы измерения.
8. Кратность и частота варианты.

V. Задание на уроках

§ 19, № 1, 3, 5, 8, 10, 12, 17, 19.

VI. Задание на дом

§ 19, № 2, 4, 6, 9, 11, 14, 18, 20.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 78–79. Простейшие вероятностные задачи

Цель: рассмотреть простейшие понятия теории вероятностей.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение среднего арифметического.

2. Приведен рост (в сантиметрах) пяти человек: 163, 183, 172, 180, 172. Найдите среднее, моду, медиану.

Вариант 2

1. Определение моды измерений.

2. Приведен рост (в сантиметрах) пяти человек: 187, 162, 171, 162, 183. Найдите: среднее, моду, медиану.

III. Изучение нового материала

В классической математике работают с реальной моделью ситуации (например, встреча двух пешеходов), которая **однозначно описывается** с помощью математического аппарата. В жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что некоторое событие может произойти, а может и не произойти (например, не оговоренная заранее встреча двух друзей в кафе). Такие непредсказуемые события называют **случайными**. **Теория вероятностей** изучает различные модели случайных событий, их свойства и характеристики. Разумеется, эта теория не может однозначно предсказать, какое событие в реальности произойдет, но может оценить, какое событие наиболее вероятно. Естественно, как и во всей остальной математике, выбранная модель **идеализирована** (например, смеси веществ считаются идеально перемешанными, изменение скорости тела происходит мгновенно и т. д.). Поэтому, как мы наблюдаем в жизни, почти небывалое событие происходит, а ожидаемое – нет.

Теперь разберемся с **основными понятиями** теории вероятностей. При этом будем считать, что случайные события **равновероятны** (или **равновозможны**), – идеализированная модель.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Для решения задач используют **алгоритм нахождения вероятности случайного события.** Необходимо определить:

1) число N всех равновозможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ исходов, в которых наступает событие A;

3) частное $\dfrac{N(A)}{N}$ равняется вероятности события A, которое обозначают символом $P(A)$, т. е. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N}$.

Пример 1

Найдем вероятность того, что при одном бросании игральной кости (кубика) выпадет: а) три очка; б) число очков, кратное трем; в) число очков больше трех; г) число очков, некратное трем.

Всего имеется $N = 6$ возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Считаем, что эти исходы равновозможны.

а) Только при одном из исходов $N(A) = 1$ происходит интересующее нас событие A – выпадение трех очков. Вероятность этого события $P(A)=\dfrac{N(A)}{N}=\dfrac{1}{6}$.

б) При двух исходах $N(B) = 2$ происходит событие B: выпадение числа очков, кратных трем: выпадение или трех, или шести очков. Вероятность такого события $P(B)=\dfrac{N(B)}{N}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

в) При трех исходах $N(C) = 3$ происходит событие C: выпадение числа очков больше трех: выпадение 4, 5 или 6 очков. Вероятность этого события $P(C)=\dfrac{N(C)}{N}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4 и 5) некратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие D наступает в четырех случаях, т. е. $N(D) = 4$. Вероятность такого события $P(D) = \frac{N(D)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Пример 2

Найдем вероятность того, что при вытаскивании одной карты из колоды (52 карты) эта карта окажется: а) дамой пик; б) дамой любой масти; в) картой пиковой масти; г) картой черной масти.

Всего имеется $N = 52$ возможных исхода. Считаем, что эти исходы равновероятны.

а) Очевидно, что в колоде только одна дама пик. Поэтому только при одном из исходов $N(A) = 1$ происходит интересующее нас событие A – выпадение дамы пик. Вероятность этого события $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{52}$.

б) Также в колоде имеются карты четырех мастей, в том числе четыре дамы. Поэтому при четырех исходах $N(B) = 4$ происходит нужное нам событие B – выпадение любой дамы. Вероятность такого события $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

в) В колоде имеется по 13 карт каждой масти, в том числе и пиковой. Поэтому число интересующих нас исходов $N(C) = 13$ – выпадение карты пиковой масти. Вероятность этого события $P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

г) В колоде имеется 26 карт черной масти и 26 карт красной масти. Число интересующих нас исходов $N(D) = 26$ – выпадение карты черной масти. Вероятность такого события $P(D) = \frac{N(D)}{N} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

Событие, которое происходит всегда, называют **достоверным** событием. Например, событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет натуральное число очков. **Вероятность** достоверного события **равна 1**. Событие, которое не может произойти, называют **невозможным**, например выпадение 9 очков на игральной кости. **Вероятность** невозможного события **равна *0***. Таким образом, вероятность $P(A)$ некоторого события $0 \le P(A) \le 1$.

При решении некоторых задач удобно использовать *свойство вероятностей противоположных событий*. События A и B называют *противоположными*, если всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A – наступление события B. Событие, противоположное событию A, обозначают символом $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий *равна 1*, т. е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 3

Пусть бросают игральную кость. Обозначим события: A – выпадения четного числа очков, B – выпадение нечетного числа очков. Очевидно, что A и B – противоположные события, т. е. $B=\overline{A}$. При этом $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 4

Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 10?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие A означает, что сумма выпавших на двух кубиках очков меньше 10. Так как благоприятным для события A является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 10. Благоприятными для события $\overline{A}$ являются: 6 + 4; 6 + 5; 6 + 6; 5 + 6; 4 + 6. Поэтому вероятность $P(\overline{A})=\frac{5}{36}$ и $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{31}{36}$.

Отметим основное правило, используемое в теории вероятностей: **правило сложения** вероятностей.

Два события называют **несовместными**, если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, т. е. наступление одного из них исключает наступление другого.

Пример 5

Пусть в мешке находятся 15 шаров: 7 белых, 5 красных и 3 зеленых. Из мешка наугад вынимают один шар.

Рассмотрим следующие события: событие A – шар оказался красным; событие B – шар оказался зеленым (очевидно, что события A и B несовместны); событие C – шар оказался не белым (красным или зеленым). Выясним, как вероятность события C связана с вероятностями каждого из событий A и B.

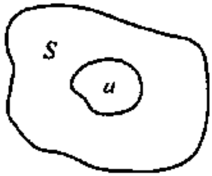
Найдем вероятности событий A, B, C. Для каждого испытания (извлечение из мешка одного шара) равновозможными являются 15 исходов. Из них для события A благоприятны 5 исходов, для события B – 3 исхода, для события C – 8 исходов. Находим вероятности этих событий: $P(A)=\frac{5}{15}$, $P(B)=\frac{3}{15}$, $P(C)=\frac{8}{15}$. Видно, что $P(C)=P(A)+P(B)$.

Имеем **правило сложения** вероятностей: если событие C означает, что наступает одно из двух несовместных событий A или B, то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

Во многих случаях количество всех исходов и интересующих нас исходов бесконечно. Поэтому понятие классической вероятности использовать невозможно.

Вероятность случайного события иногда можно найти, используя геометрические соображения (**геометрическая вероятность**).

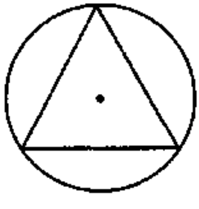
Предположим, что точку бросают в фигуру площади S. Пусть эта фигура содержит фигуру площади a. Будем считать вероятностью P попадания точки в меньшую фигуру отношение $\frac{a}{S}$, т. е. $P = \frac{a}{S}$.



Пример 6

В окружность вписан правильный треугольник. Найдем вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадет в треугольник.

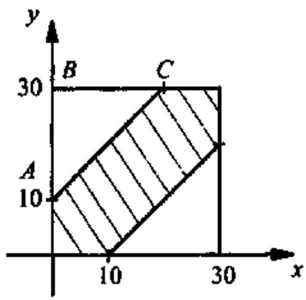
Пусть радиус окружности равен R, а сторона треугольника равна c. Свяжем между собой эти переменные. Используем теорему синусов: $\frac{c}{\sin 60°} = 2R$, откуда $c = 2R\sin 60° = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Найдем площадь треугольника: $a = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Найдем вероятность попадания точки в треугольник: $P = \frac{a}{S} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}41$.



Пример 7

Коля и Миша договорились встретиться в условленном месте с 10 ч до 10 ч 30 мин, причем каждый пришедший ждет другого 10 мин, после чего уходит. Найдем вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент своего прихода наудачу в указанном интервале.

Пусть x – момент прихода на место встречи Коли, y – момент прихода Миши. Так как время ожидания составляет 10 мин, то для встречи необходимо выполнение неравенства $|y - x| \le 10$, или $-10 \le y - x \le 10$, или $x - 10 \le y \le x + 10$. На координатной плоскости построим квадрат со стороной 30. Каждая точка этого квадрата соответствует времени прихода мальчиков.



Построим также множество точек, удовлетворяющих неравенству $x - 10 \le y \le x + 10$ (эта область заштрихована). Тогда вероятность встречи мальчиков равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата. Площадь квадрата равна $30^2 = 900$. Найдем площадь треугольника ABC и получим: $\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200$. Тогда площадь заштрихованной фигуры: $900 - 2 \cdot 200 = 500$. Вероятность встречи мальчиков $\frac{500}{900} = \frac{5}{9}$.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие вероятности события.
2. Какие события называют несовместными?
3. Правило сложения вероятностей.
4. Свойство вероятностей противоположных событий.
5. Понятие о геометрической вероятности.

V. Задание на уроках

§ 20, № 1; 3; 6; 9; 11 (а, б); 12 (а, в); 15; 18; 21 (а, б); 22 (а, г).

VI. Задание на дом

§ 20, № 2; 5; 7; 10; 11 (в, г); 12 (б, г); 16; 19; 21 (в, г); 22 (б, в).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 80–81. Экспериментальные данные и вероятности событий

Цель: обсудить связь между вероятностями событий и экспериментальными статистическими данными.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Достоверное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет четное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 8.

Вариант 2

1. Невозможное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет нечетное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 9.

III. Изучение нового материала

Обсудим связь между вероятностями случайных событий и экспериментальными статистическими данными. При этом экспериментальные данные – **результат** конкретного **измерения** (реальный факт), **вероятность** такого события – **модель** реальности. Рассмотрим вопрос о соотношении реальности и ее модели.

Пример 1

Разумно предположить, что вероятность выпадения орла при бросании монеты равна 0,5. Однако при небольшом числе бросаний это может и не проявиться. Например, при пяти бросаниях орел может выпасть все пять раз (а может и ни разу). Вместе с тем при очень большом числе бросаний орел выпадает примерно в половине случаев. Так в XVIII в. при бросании монеты 4040 раз орел выпал 2048 раз (вероятность 0,5069); в конце XX в. при бросании 10 000 раз – 4979 раз (вероятность 0,4979).

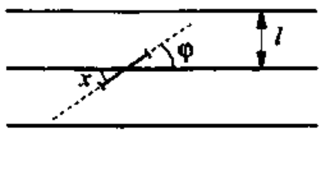
Таким образом, при неограниченном увеличении числа независимых повторений одного и того же опыта в одинаковых условиях частота появления определенного результата случайного события приближается к некоторому постоянному числу. Это явление называют **статистической устойчивостью**, а указанное число – **статистической вероятностью события**.

Результат каждого бросания монеты является случайным событием и непредсказуем. Однако явление статистической устойчивости гарантирует, что с увеличением числа повторений опыта частота события стремится к его вероятности.

Отметим, что статистическая вероятность позволяет определять фундаментальные **математические постоянные**, например, число π.

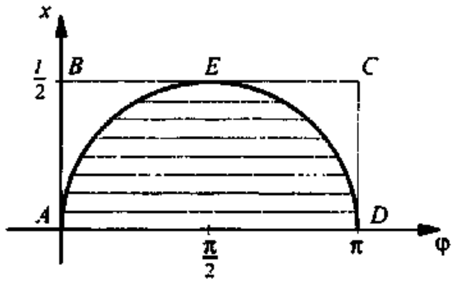
Пример 2

Рассмотрим известную задачу Ж. Бюффона (1707–1788). Пусть расстояние между параллельными прямыми и длина иглы равны l. Найдем вероятность того, что случайным образом брошенная игла пересечет какую-нибудь прямую.



Будем характеризовать положение иглы расстоянием x от середины иглы до ближайшей прямой и углом φ между иглой и прямой. Очевидно, что $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi$. Если игла пересекает прямую, то выполняется неравенство $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$. Построим прямоугольник $ABCD$, который задается неравенствами $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi$, а также фигуру AED, определяемую неравенством $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$. Используя понятие геометрической вероятности, получим, что вероятность пересечения иглой одной из прямых равна $P = \frac{S_{AED}}{S_{ABCD}}$.

Найдем эти площади: $S_{ABCD} = \frac{\pi l}{2}$, $S_{AED} = l$ (эту величину можно найти только с помощью интегрирования). Получаем: $P = \frac{2}{\pi}$, откуда $\pi = \frac{2}{P}$.



Заметим, что такие эксперименты проводились. Так в 1850 г. при 5000 бросаний было получено $\pi = 3{,}1596$, в 1985 г. при 1120 бросаниях – $\pi = 3{,}1419$, в 1901 г. при 3408 бросаниях – $\pi = 3{,}1416$. Напомним, что точное значение $\pi = 3{,}1415\ldots$. Таким образом, число π было найдено с очень высокой точностью.

Понятие статистической вероятности позволяет решать многие практические задачи.

Пример 3

Как приближенно посчитать число рыб в озере?

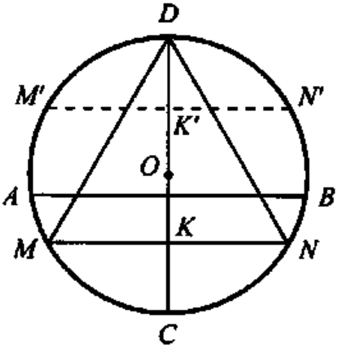
Пусть в озере плавает x рыб. Бросаем сеть и отлавливаем n рыб. Вероятность поймать одну рыбу $P = \frac{n}{x}$. Пометим этих рыб и выпустим в озеро. Через несколько дней в ту же погоду, в том же месте ставим ту же сеть. Предположим, что поймали m рыб, из них k меченых. Меченую рыбу поймали с вероятностью $P = \frac{k}{m}$. Получаем равенство: $\frac{n}{x} = \frac{k}{m}$, откуда $x = \frac{nm}{k}$. Разумеется, точность такого эксперимента будет невысокой, но для оценки числа рыб в озере вполне допустима.

Заметим, что при решении задач по теории вероятностей важнейшее значение имеет понятие **«случайным образом»**.

Пример 4

Обсудим парадокс Ж. Бертрана (1822–1900). Рассмотрим окружность и вписанный в нее правильный треугольник. Возьмем произвольную хорду окружности и найдем вероятность того, что эта хорда больше стороны треугольника. Парадокс состоит в том, что при разных способах решения будут получены разные ответы.

Первый способ. Пусть проведена хорда AB. Построим диаметр CD, перпендикулярный этой хорде. Также параллельно хорде AB построим сторону MN правильного вписанного треугольника MND и прямую $M'N'$, симметричную стороне MN относительно центра O окружности. Хорды AB, которые пройдут через точки отрезка KK' диаметра CD, будут длиннее MN.

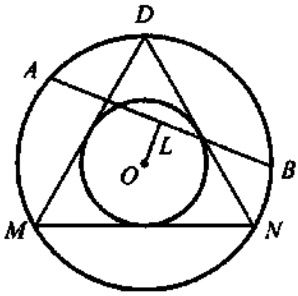


Легко показать, что $CK = \frac{1}{4}CD$ и $KK' = \frac{1}{2}CD$. Разумно считать, что вероятность рассматриваемого события $P = \frac{KK'}{CD} = \frac{1}{2}$ (первый ответ).

Второй способ. Совместим один конец A хорды AB с вершиной M правильного треугольника MND. Хорды AB, которые попадают во внутреннюю часть угла $DMN = 60°$, будут больше стороны MN треугольника.

Разумно считать, что все хорды, которые можно провести через точку M, равномерно распределены по углу $QMP = 180°$. Тогда вероятность рассматриваемого события $P = \frac{\angle DMN}{\angle QMP} = \frac{60°}{180°} = \frac{1}{3}$ (второй ответ).

Третий способ. Положение хорды AB можно характеризовать положением ее середины L. Если точка L будет расположена внутри окружности, вписанной в треугольник MND, то хорда AB будет больше стороны MN. Радиусы вписанной r и описанной R окружностей различаются в два раза, т. е. $R = 2r$. Тогда вероятность рассматриваемого события равна отношению площадей таких окружностей, т. е. $P = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$ (третий ответ).



Таким образом, в зависимости от способа решения получили три разных ответа: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Разные результаты получили потому, что по-разному трактовалось понятие проведения хорды случайным образом. Фактически каждый раз решалась новая задача. Нам только казалось, что это одна и та же задача.

IV. Контрольные вопросы

1. Связь реальности и ее модели.
2. Статистическая устойчивость и статистическая вероятность события.
3. Применения статистической вероятности события.

V. Задание на уроках

§ 21, № 1, 3, 5, 7, 9.

VI. Задание на дом

§ 21, № 2, 4, 6, 8, 10.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 82–83. Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Учитывая специфику изученной темы, контрольную работу целесообразно провести по вариантам одинаковой сложности. Зачетная работа по теме проводиться не будет.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Сколькими способами можно разместить 5 различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 7, 9?

3. Из 10 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите: $3P_3 + 2A_{10}^2 - C_7^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 17 человек – в банке, 23 – в фирме и 19 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 3, 7 и 8 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не пропал в маленький круг.

Вариант 2

1. Сколькими способами можно разместить 6 различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 8?

3. Из 8 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите: $P_4 - 2A_6^2 + 3C_8^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 19 человек – в банке, 31 – в фирме и 15 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 4, 5 и 9 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

IV. Ответы

Вариант 1

1. 120.
2. 100.
3. 36.
4. 177.
5. $\frac{23}{59}$.
6. $\frac{5}{8}$.

Вариант 2

1. 720.
2. 48.
3. 28.
4. –36.
5. $\frac{19}{65}$.
6. $\frac{1}{9}$.

Итоговое повторение

Перед сдачей экзамена по математике предусмотрено достаточно обширное повторение курса алгебры за 7–9 классы. Темы и задачи материала полностью соответствуют ГИА. В рамках данного пособия нет возможности подробно изложить изученный курс. Поэтому ограничимся приведением основных сведений и формул.

Уроки 84–85. Числовые выражения

Цель: вспомнить действия со степенями.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение пройденного материала

Данную тему полезно рассматривать совместно со следующей темой «Алгебраические выражения».

Выражения, содержащие числа, знаки арифметических действий и скобки, называют **числовыми выражениями**. При их вычислении в первую очередь выполняются действия в скобках, затем операции: возведение в степень, умножение, деление. Наконец, выполняются действия: сложение и вычитание.

Натуральной степенью n ($n \geq 2$, $n \in N$) числа a называют произведение n одинаковых множителей a, т. е. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. **Целой отрицательной степенью** ($-n$) числа a называют число $\frac{1}{a^n}$, т. е. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Число b называют *корнем* n-й степени ($n \geq 2$, $n \in N$) из числа a, если выполнено равенство $b^n = a$ (т. е. $b = \sqrt[n]{a}$, если $b^n = a$). При этом для четного числа n числа a и b неотрицательные.

III. Задание на уроках

№ 1, 4, 8, 10, 12, 14, 20, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 38, 40, 42.

IV. Задание на дом

№ 2, 5, 9, 11, 13, 15, 21, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 39, 41, 43.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 86–87. Алгебраические выражения

Цель: вспомнить преобразования алгебраических выражений.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\dfrac{3^5 \cdot 9^{-2} \cdot 27}{3^2 \cdot 9}$;

б) $\sqrt{41^2 - 40^2} + (\sqrt{8} - 4)(\sqrt{8} + 4)$.

2. Расположите числа $3\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$ в порядке возрастания.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot 8}{2^2 \cdot 16}$;

б) $\sqrt{113^2 - 112^2} + (\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$.

2. Расположите числа $\sqrt{21}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{19}$, $4\sqrt{2}$ в порядке возрастания.

III. Повторение пройденного материала

1. Свойства степеней с действительными показателями:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$; 4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$.

2. Свойства корней:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$; 5) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$.

3. Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

4. Формулы сокращенного умножения:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;

4) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;

5) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;

6) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

7) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5. Разложение многочленов на множители.

При разложении многочленов на множители используют следующие приемы:

а) вынесение общего множителя за скобки;
б) группировку членов;
в) использование формул сокращенного умножения;
г) нахождение корней многочлена.

IV. Задание на уроках

№ 1, 4, 7, 11, 15, 21, 23, 32, 39, 41, 45, 47.

V. Задание на дом

№ 2, 5, 8, 12, 16, 22, 24, 33, 40, 42, 46, 48.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 88–89. Функции и графики

Цель: вспомнить графики основных функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2 - xy^2 + 2y^2 - 4}{x^2+2x+2y^2-y^4} - \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+xy^2-2x-2y^2}$;

2) $\left(\dfrac{x^2}{x^2-\sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{y}}{x^2+\sqrt{y}}\right) : \left(\dfrac{x^2+\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - \dfrac{x^2-\sqrt{y}}{x}\right)$.

Вычислите: $\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{48}}$.

Вариант 2

Упростите выражение:

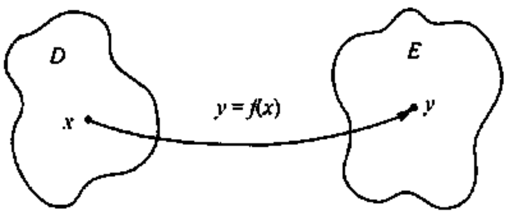
1) $\dfrac{x^4-y^4}{4x^2-2x+y-y^2}-\dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{2x-y}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+y^2}{y^2}-\dfrac{\sqrt{x}-y^2}{\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{x}+y^2}\right)$.

Вычислите: $\sqrt{7+3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{45}}$.

III. Повторение пройденного материала

Функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу (закону) число y из множества E, зависящее от x. Такое правило (закон) является функцией $y = f(x)$ с областью определения D и областью значений E.



При этом величину x называют **независимой переменной** (или **аргументом** функции), величину y – зависимой переменной (или **значением функции**).

Точка пересечения графика функции с осью ординат равна значению функции $y = f(x)$ при $x = 0$, т. е. $y = f(0)$. Точки пересечения графика функции с осью абсцисс (их еще называют **нулями** функции) являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

Промежутки знакопостоянства функции – те значения переменной x, при которых функция принимает положительные ($y > 0$) и отрицательные ($y < 0$) значения.

Монотонность – возрастание или убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$). Функция называется **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Область определения функции называется **симметричной**, если в нее входит и точка x_0, и точка $(-x_0)$ (т. е. точка, симметричная точке x_0 относительно начала числовой оси).

Функция называется **четной**, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется, т. е. $f(-x) = f(x)$. График четной функции **симметричен относительно оси ординат**. Функция называется **нечетной**, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т. е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции **симметричен относительно начала координат.**

Основные виды рациональных функций

а) **Линейная функция** $y = ax + b$ (где a и b – некоторые числа). График функции – прямая линия.

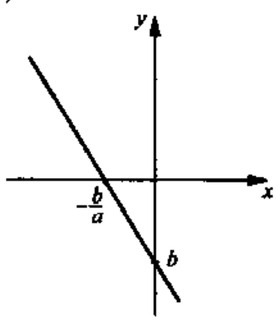
б) **Квадратичная функция** $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – некоторые числа). График функции – парабола.

в) **Дробно-линейная функция** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где a, b, c, d – некоторые числа). График функции – гипербола.

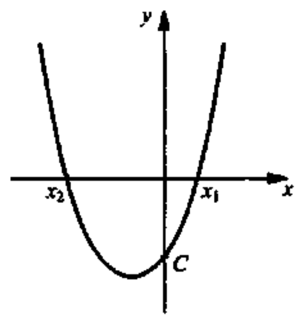
г) **Степенная функция** $y = x^{\alpha}$ (пока будем рассматривать целые значения α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$)).

Для некоторых значений чисел a, b, c, d, α приведем графики этих функций.

а)

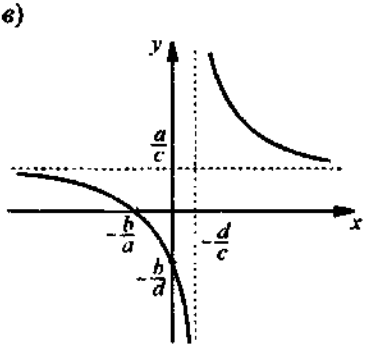


б)

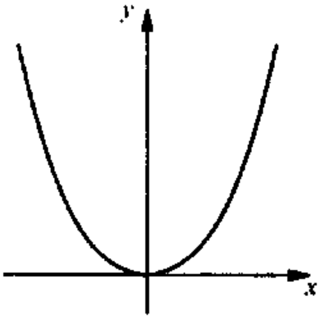


$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

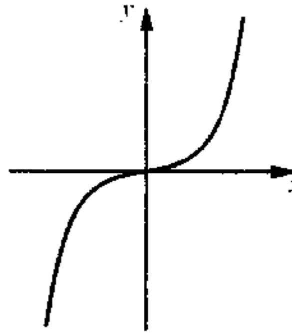
в)



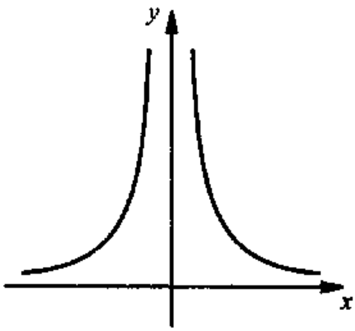
г)



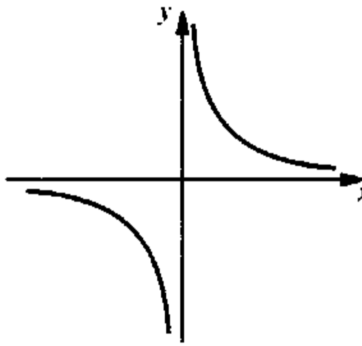
α – четное



α – нечетное



α – четное



α – нечетное

IV. Задание на уроках

№ 1, 5, 10, 15, 17, 19, 23, 25, 29, 33, 37, 42, 45, 50, 53, 61, 67, 72, 79, 84, 87, 90, 92, 94, 97, 102, 106, 116, 122, 131, 138, 143, 147, 160, 167, 174, 181.

V. Задание на дом

№ 2, 6, 14, 16, 18, 20, 24, 26, 30, 34, 38, 43, 46, 51, 55, 63, 68, 73, 80, 85, 88, 91, 93, 95, 103, 107, 117, 123, 133, 139, 148, 161, 168, 175, 182.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 90–91. Уравнения и системы уравнений

Цель: рассмотреть основные типы уравнений и систем уравнений.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{3x-5}{2x^2-5x+3}$.

2. Найдите область значений функции $y=-3x^2+6x-5$.

3. Постройте график функции $y=2x-1+|x-2|$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{3-4x}{3x^2-7x+4}$.

2. Найдите область значений функции $y=-2x^2+8x-7$.

3. Постройте график функции $y=2x+2+|x+4|$.

III. Повторение пройденного материала

Линейные уравнения $ax+b=0$

Члены уравнения, зависящие от неизвестной x, группируют в одной части, числа – в другой, т. е. $ax=-b$. Далее возможен один из трех случаев.

а) Если $a\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=-\dfrac{b}{a}$.

б) Если $a=0$ и $b=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений $x\in(-\infty;+\infty)$.

в) Если $a=0$ и $b\neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Квадратные уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

При решении квадратных уравнений важнейшей характеристикой является **дискриминант** $D=b^2-4ac$. Для $D<0$ уравнение корней не имеет, при $D=0$ имеет один корень $x=-\dfrac{b}{2a}$, при $D>0$ – два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Для корней x_1 и x_2 квадратного уравнения выполняются формулы Виета: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Уравнения высокой степени $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 3$)

Для решения уравнений высоких степеней используют два основных приема:

а) подбор корня уравнения среди делителей свободного члена и понижение степени уравнения;

б) использование замены переменной.

Рациональные уравнения

При решении таких уравнений прежде всего находят область допустимых значений (ОДЗ) неизвестной. Затем умножают члены уравнения на наименьший общий знаменатель дробей и получают целое уравнение. Решают уравнение и находят его корни. Исключают решения, не входящие в ОДЗ данного уравнения. Оставшиеся корни будут решениями исходного уравнения.

Иррациональные уравнения

Для решения подобных уравнений необходимо избавиться от знаков корня (радикалов). Для этого применяют два основных способа:

а) поочередное уединение радикалов и возведение частей уравнения в соответствующую степень;

б) использование новой переменной.

При решении иррациональных уравнений очень часто возникают посторонние корни. Поэтому все найденные решения необходимо проверить, например, подстановкой в исходное уравнение.

Системы линейных уравнений

Решение **систем линейных уравнений** трудностей не вызывает. При этом используются способ алгебраического сложения уравнений, способ подстановки, способ сравнения. Если в системе **одно уравнение линейное**, то из него можно выразить одну переменную через другую и использовать способ подстановки.

Системы нелинейных уравнений

В случае **системы нелинейных уравнений** необходимо получить одно линейное уравнение. Наиболее типичны системы **симметричных** уравнений и системы **однородных** уравнений.

В симметричной системе уравнения не меняются при замене переменных друг на друга $x \rightleftarrows y$. Для их решения используются новые переменные $a = x + y$ и $b = xy$.

Системы уравнений, у которых левая часть одного из уравнений является однородным многочленом, а правая часть равна нулю или у которых левые части двух уравнений являются однородными многочленами, а правые части равны некоторым числам, называются **однородными системами** уравнений. При решении таких систем из однородного уравнения находят связь между неизвестными.

IV. Задание на уроках

№ 1, 3, 8, 14, 18, 26, 32, 34, 38, 46, 50, 56, 62, 66, 70, 74, 76, 78, 82, 84, 86, 88.

V. Задание на дом

№ 2, 4, 9, 15, 19, 27, 33, 35, 40, 47, 51, 57, 63, 67, 71, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 92–93. Неравенства и системы неравенств

Цель: повторить основные способы решения неравенств и систем неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения $3x^2 - 7x + 1 = 0$.

2. Один из корней уравнения $3ax^2 - 4x + a = 0$ равен 1. Найдите другой корень уравнения и значение a.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2xy + x^2 = 3, \\ 3xy + 4y^2 = 22. \end{cases}$

Вариант 2

1. Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

2. Один из корней уравнения $5ax^2 - 6ax + 1 = 0$ равен 1. Найдите другой корень уравнения и значение a.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

III. Повторение пройденного материала

Решение неравенств аналогично решению соответствующих уравнений. При этом необходимо помнить три правила.

1. К обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число или выражение (или любой член неравенства можно перенести с противоположным знаком из одной части в другую).

2. Обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число. При этом знак неравенства сохраняется.

3. Обе части неравенства можно умножить на одно и то же отрицательное число. При этом знак неравенства меняется на противоположный.

Поэтому **линейное** неравенство $ax + b > 0$ записывают в виде $ax > -b$. Делим обе части на коэффициент a и находим решение неравенства: при $a \in (0; +\infty)$ $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ и при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

При решении **квадратных** неравенств находят корни соответствующего квадратного уравнения. Затем рассматривают схематично график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (парабола) или используют метод интервалов.

Метод интервалов – универсальный и эффективный способ решения неравенств. Находят значения переменной x, при которых данное выражение равно нулю или не существует, и отмечают их на числовой оси. Строят диаграмму знаков выражения. Надо помнить, что при проходе через корень нечетной кратности знак выражения меняется на противоположный, через корень четной кратности – сохраняется. На основании построенной диаграммы выписывают решение неравенства.

При решении **иррациональных** неравенств необходимо учитывать область допустимых значений (ОДЗ) и область существования решений (ОСР). Для решения используют два основных приема: а) уединение радикала и возведение в степень; б) замену переменной. Помните, что при решении неравенств возводить обе части в четную степень можно только в том случае, когда эти части неотрицательны (подробнее см. материал в этом пособии).

IV. Задание на уроках

№ 1, 7, 9, 13, 21, 27, 30, 34, 41, 46, 50, 61, 65, 69, 73, 77, 83, 94, 100, 108, 112, 114.

V. Задание на дом

№ 2, 8, 10, 14, 22, 29, 31, 36, 42, 47, 51, 62, 66, 70, 74, 78, 84, 95, 101, 109, 113, 115.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 94–95. Задачи на составление уравнений или систем уравнений

Цель: напомнить основные типы текстовых задач.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите неравенство $\dfrac{(5-3x)(x+3)}{x^2-3x+2} \geq 0.$

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3} \leq 7, \\ \dfrac{2x+1}{5}+\dfrac{x+2}{4} > 1. \end{cases}$

3. Решите неравенство $\sqrt{3x+1} \geq 2x.$

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x-7}}{2x^2-5x+3} \leq 0.$

Вариант 2

1. Решите неравенство $\dfrac{x^2-5x+4}{(x+2)(5-4x)} \leq 0.$

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{5x-2}{3}+\dfrac{x-1}{2} \leq 5, \\ \dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{x+1}{4} > 1. \end{cases}$

3. Решите неравенство $\sqrt{x+2} \geq 3x-4.$

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3x-10}}{3x^2-7x+4} \le 0.$

III. Повторение пройденного материала

Текстовые задачи условно разделяются на четыре типа:

1) задачи на движение;
2) задачи на работу и производительность труда;
3) задачи на процентное содержание и концентрацию;
4) задачи на числа.

Успех в решении задач во многом зависит от удачного выбора неизвестных, и не всегда удобно выбирать те величины, которые необходимо найти по условию задачи. Как правило, в качестве неизвестных выбирают такие величины, используя которые проще всего записать условия задачи в математической форме (т. е. в виде уравнения или системы уравнений).

Можно предложить следующую схему решения:

– выбрать удобные для описания условий задачи неизвестные;
– составить необходимые уравнения или системы уравнений;
– решить полученные уравнения или системы уравнений;
– отобрать подходящие по смыслу задачи решения.

1. Задачи на движение

Обычно в качестве неизвестных выбирают **расстояния** и **скорости** движущихся тел (время в качестве неизвестного выбирается очень редко). Как правило, подобные задачи связаны **со встречами** тел. При движении тел навстречу друг другу они встречаются через время $\frac{S}{v_1+v_2}$ (где S – начальное расстояние между телами, v_1 и v_2 – скорости тел); при движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) они встречаются через время $\frac{S}{v_1-v_2}$ (первое тело догоняет второе). Эти формулы справедливы и **при движении по прямой**, и при движении **по окружности**.

2. Задачи на работу и производительность труда

В качестве неизвестных обычно выбирают **работу** и **производительность** труда. Под производительностью труда понимают работу, выполняемую в единицу времени. Этот тип задач очень похож на предыдущий, что следует из сходства базовых соотношений: $S = v \cdot t$ и $A = N \cdot t$ (где S – пройденное расстояние, v – скорость движения тела, t – время, A – выполненная работа, N – производительность труда).

3. Задачи на процентное содержание и концентрацию

Напомним, что **процентом** называют **сотую часть** рассматриваемой **величины**. Если в смеси растворов объемом V нас интересует компонент, имеющий объем V_0, то **концентрацией** этого компонента C_0 называется отношение $\frac{V_0}{V}$, т. е. $C_0 = \frac{V_0}{V}$. Очевидно, что процентное содержание $P_0 = \frac{V_0}{V} \cdot 100$ этого компонента в смеси связано простым соотношением с его концентрацией $P_0 = C_0 \cdot 100$.

В качестве неизвестных обычно выбирают **объемы компонентов смеси или их концентрации**.

4. Задачи на числа

При решении задач в основном используются **запись деления числа с остатком** и **запись числа в десятичной системе** счисления. **Деление натурального числа n** на натуральное число p ($n \geq p$) **с остатком** состоит в нахождении такого натурального числа k и такого неотрицательного целого числа r ($0 \leq r < p$), что выполняется равенство $n = p \cdot k + r$. При этом число n – делимое, p – делитель, k – частное и r – остаток. Запись числа в десятичной системе означает поразрядную его запись, из которой видно, какое число единиц, десятков, сотен и т. д. входит в это число. Например, число $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ состоит из a сотен, b десятков и c единиц.

IV. Задание на уроках

№ 1, 4, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 33, 35, 37.

V. Задание на дом

№ 2, 5, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 34, 36, 38.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 96–97. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Цель: напомнить основные свойства прогрессий.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15%. Затем после пересчета подняли эту цену на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

Вариант 2

1. Цену товара повысили на 20%, затем новую цену повысили еще на 10%. Затем после пересчета снизили эту цену на 15%. На сколько процентов всего повысили первоначальную цену товара?

2. Сумма цифр двузначного числа равна 9. Если к искомому числу прибавить 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

III. Повторение пройденного материала

Последовательность чисел a_n, каждый член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разностью прогрессии), называется **арифметической прогрессией**, т. е. $a_n = a_{n-1} + d$. Например, числа 2, 5, 8, 11, ... образуют арифметическую прогрессию.

Основные свойства арифметической прогрессии:

1) формула n-го члена: член прогрессии a_n выражается через ее первый член a_1, разность d и порядковый номер этого члена n по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$;

2) сумма n первых членов прогрессии вычисляется по формулам

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

3) характеристическое свойство: любой член прогрессии равен полусумме соседних членов $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Последовательность чисел b_n (первый член которой отличен от нуля), в которой каждый член равен предыдущему, умноженное на одно и то же число q (q – знаменатель прогрессии, $q \neq 0$), называется **геометрической прогрессией**, т. е. $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Например, числа 2, 6, 18, 54, ... образуют геометрическую прогрессию.

Основные свойства геометрической прогрессии:

1) формула n-го члена: член прогрессии b_n выражается через ее первый член b_1 и порядковый номер этого члена n по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;

2) сумма n первых членов прогрессии вычисляется по формулам
$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ или $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$;

3) характеристическое свойство: квадрат любого члена прогрессии равен произведению соседних членов: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией**. Для нее справедливы свойства и формулы, приведенные ранее. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

IV. Задание на уроках

№ 1, 3, 5, 11, 18, 23, 25, 27, 31, 33, 35, 39, 41, 48, 56, 58, 63, 65, 69, 74, 75, 79.

V. Задание на дом

№ 2, 4, 6, 12, 19, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 40, 42, 49, 57, 59, 64, 66, 70, 73, 76, 80.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 98–99. Итоговая контрольная работа

Цель: проконтролировать знания по всем темам курса по однотипным вариантам.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

В заключение обучения проводится итоговая контрольная работа по вариантам одинаковой сложности. На наш взгляд, использование при подведении итогов вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов необходимо учитывать все результаты обучения (оценки за контрольные мероприятия, сложность решаемых задач, активность на уроках и т. д.).

III. Критерии оценки работы

Вариант традиционно содержит шесть задач примерно одинаковой сложности. Поэтому рекомендуем использовать те же критерии при оценке, что и для вариантов 1 и 2 контрольных работ при текущем обучении.

Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

IV. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Упростите выражение $(4x^2-25y^2)\left(\frac{1}{2x+5y}+\frac{1}{2x-5y}\right)$.

2. Решите уравнение $\frac{2x-3}{x}=\frac{x+6}{x+4}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-3y)(x+4)=0,\\ x-5y=1.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $2<3-\frac{2}{3}x<4$.

5. Постройте график функции $y=x^2-3x$. При каких значениях x функция принимает положительные значения?

6. Сын младше отца в 6 раз, а через год он станет младше отца в 5 раз. Через сколько лет сын будет младше отца в 3 раза?

Вариант 2

1. Упростите выражение $(9x^2-16y^2)\left(\frac{1}{3x-4y}-\frac{1}{3x+4y}\right)$.

2. Решите уравнение $\frac{5x+2}{x}=\frac{4x+13}{x+4}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+4y)(x+2)=0,\\ x+3y=1.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $3<4-\frac{3}{4}x<5$.

5. Постройте график функции $y=2x-x^2$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

6. Отец старше сына в 9 раз, а через год он станет старше сына в 7 раз. Через сколько лет отец будет старше сына в 5 раз?

V. Ответы

Вариант 1

1. $4x$.
2. $x_1=-3$ и $x_2=4$.

3. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $(-4; -1)$.

4. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

5. График построен; при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

6. Через 6 лет.

Вариант 2

1. $8y$.
2. $x_1 = -8$ и $x_2 = -1$.
3. $(4; -1)$, $(-2; 1)$.
4. $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{5}\right)$.
5. График построен; при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
6. Через 3 года.

Урок 100. Подведение итогов обучения

Цель: ознакомить учащихся с результатами обучения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Результаты итоговой контрольной работы

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Типичные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной работы (вывешен на стенде).

III. Итоги учебного года

1. Сообщение годовых оценок по алгебре (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников, обратить внимание на недостатки менее успевающих учеников и дать рекомендации по их преодолению).

2. Особенности прошедшего учебного года (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание на необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнений, неравенств и систем уравнений, неравенств).

3. Поздравить с окончанием учебного года.

IV. Сориентировать учащихся на ГИА по математике (детальная беседа о ГИА будет проведена на следующих уроках).

Государственная итоговая аттестация по алгебре (ГИА)

Уроки 101–102. Государственная итоговая аттестация по алгебре (факультативное занятие)

Цель: сообщить основные положения о ГИА и дать рекомендации по написанию экзамена.

Основные положения

В настоящее время возникла и развивается новая форма государственной (итоговой) аттестации по алгебре в 9 классе – аналог Единого государственного экзамена по математике в 11 классе. Такая система уже использовалась при проведении экзамена в 9 классе во многих регионах России: Московской области, Краснодарском крае, Челябинской, Псковской, Новгородской, Кемеровской, Калининградской и других областях.

Основное назначение новой формы экзамена – введение открытой объективной независимой процедуры оценки знаний учащихся. Результаты такой оценки способствуют осознанному выбору дальнейшего пути получения образования, учитываются при формировании профильного 10 класса.

Характеристика экзаменационной работы

Работа состоит из двух частей, каждая из которых направлена на проверку определенных понятий, знаний, навыков, имеет свою систему оценок в баллах и разное оформление на экзамене.

Часть 1 направлена на проверку базовой подготовки учащихся. Проверяются понимание смысла важнейших понятий, знание важнейших фактов, умение применять известные способы решения несложных задач, применять знания в простейших практических ситуациях. Здесь представлены задачи по темам: числа, буквенные выражения, преобразования выражений, уравнения и текстовые задачи, неравенства, функции и графики, последовательности и прогрессии.

В эту часть работы включены 18 заданий с выбором ответа (из четырех приведенных), с кратким ответом и на соотнесение условий задачи и приведенных ответов. В экзаменационный бланк вписывается только ответ, никаких решений не приводится. За каждое верно выполненное задание начисляется 0,5 балла.

Часть 2 направлена на проверку профилированной (повышенного уровня) подготовки учащихся. Проверяются умение решать достаточно сложные задачи с использованием различных фактов и способов, владение исследовательскими навыками, умения найти и применить нестандартные приемы. Здесь представлены задачи по темам: выражения и их преобразования, уравнения и системы уравнений, неравенства, функции, координаты и графики, арифметическая и геометрическая прогрессии, текстовые задачи.

В эту часть работы включены 5 заданий из различных разделов курса. Задания расположены по нарастанию сложности – от относительно простых до достаточно сложных. Предусматривается полная запись хода решения. Каждое задание оценивается (в зависимости от сложности) в 2, 4 и 6 баллов (даны одна задача в 2 балла, две задачи по 4 балла и две задачи по 6 баллов).

На проведение экзамена отводится 240 минут (4 часа). При этом на выполнение части 1 время ограничено – на нее отводится 60 мин.

Экзаменационная работа предлагается в четырех вариантах. Каждому учащемуся в начале экзамена выдается бланк с полным текстом работы. Ответы к заданиям части 1 учащиеся отмечают в бланке с заданиями, вторая часть выполняется на отдельных листах.

Для оценки результатов выполнения работы используются два количественных показателя: рейтинг (сумма баллов за верно выполненные задания) и оценка 2, 3, 4 или 5. Если за часть 1 работы получено менее 3,5 балла, то этот результат не компенсируется выполнением заданий части 2 и ученику ставится оценка 2. Если общий рейтинг по работе выражается дробным числом, то он округляется с избытком до ближайшего целого числа. За часть 1 работы можно максимально получить 9 баллов, за часть 2 – 22 балла, за всю работу – 31 балл. Соответствие между рейтингом и оценкой: 4–7 баллов – оценка 3, 8–15 баллов – оценка 4, 16–31 балл – оценка 5.

Общие рекомендации по экзамену

1. Математику надо знать. Чем лучше вы ее знаете, тем больше баллов сможете набрать и претендовать на более высокую отметку в школе и на поступление в профильные классы или школы. Наше пособие позволяет эффективно и успешно подготовиться по всем темам, входящим в экзамен (первые шесть тем).

2. Выполняйте задания экзамена в том порядке, в котором они даны. Задания части 1 существенно проще заданий части 2 и не требуют много времени. Кроме того, к этим заданиям приведены

варианты ответов, и можно или определить правильный ответ, или исключить явно неверные ответы (см. далее).

3. При решении заданий части 1 не тратьте время на аккуратность записей и обоснование решений. Ваша задача – определить правильный ответ, который обводится в тексте задания или вписывается на специальном месте.

4. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения заданий у вас еще останется время, то вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

5. Контролируйте время на выполнение заданий (на первую часть дается не более 60 мин). Не зацикливайтесь на нерешенной задаче – лучше ее пропустить.

6. В оставшееся время переходите к решению более сложных заданий части 2. Здесь вам понадобятся все умения и навыки, творческий, нестандартный подход к задаче. Даже если вы до конца не решите задачу, то сделанные этапы задания будут оценены. Пугаться этих заданий не следует – они базируются на более простых и известных задачах. Обращайте внимание на обоснованность решений в этих заданиях. Задания части 2 выполняются на отдельных листах.

7. Как правило, в вычислительных задачах ответом является целое число. Если у вас получился другой ответ, быстро проверьте ход решения и математические расчеты.

Советы по проверке заданий части 1 экзамена

В заданиях части 1 надо выбирать правильный ответ из четырех возможных вариантов. Рассмотрим приемы, которые позволяют или определить правильный ответ, или исключить явно неверные ответы. Проиллюстрируем эти приемы примерами из вариантов ГИА.

Способ контрольных точек

Ответ проверяется для нескольких (наиболее простых) значений переменных. Способ применяется в преобразованиях выражений, при решении неравенств и т. д.

Пример 1

Упростите выражение $(a-4)^2-2a(3a-4)$.

1) $-5a^2+16$;
2) $-5a^2+8a-16$;
3) $-5a^2+8$;
4) $-5a^2+8a-4$.

Приведенные ответы отличаются свободным членом. Поэтому подставим, например, значение $a = 0$ в данное выражение и ответы. При подстановке в выражение получим: $(-4)^2 = 16$. При подстановке в ответы только ответ 1 дает тот же результат. Поэтому сразу определяется правильный ответ 1.

Пример 2

Известно, что a – число нечетное. Какое из чисел является четным?

1) $3a$;
2) $a + 2$;
3) $2a + 1$;
4) $a^2 + 1$.

Возьмем любое нечетное число, например 5, и подставим в ответы. Соответственно, получаем: 15, 7, 11 и 26. Видим, что только для ответа 4 получается четное число.

Пример 3

Сравните a^2 и a^3, если известно, что $0 < a < 1$.

1) $a^2 < a^3$;
2) $a^2 > a^3$;
3) $a^2 = a^3$;
4) для сравнения не хватает данных.

Даже не зная свойств числовых неравенств, можно взять любое число a, удовлетворяющее неравенству $0 < a < 1$, например число $\frac{1}{2}$. Найдем: $a^2 = \frac{1}{4}$ и $a^3 = \frac{1}{8}$. Так как $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, то $a^2 > a^3$ и правильный ответ 2.

Способ граничных точек

При решении неравенств (или задач, связанных с неравенствами) ответы могут различаться граничными точками промежутков. Поэтому проверку надо начинать именно с этих точек. Способ похож на предыдущий.

Пример 4

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 4 \geq 0, \\ 15 - 3x \leq 0. \end{cases}$

1) $x \geq -2$;
2) $x \geq 5$;
3) $-2 \leq x \leq 5$;
4) $x \leq -5$ и $x \geq 2$.

Ответы 1 и 3 отличаются от ответов 2 и 4 тем, что в данную систему входит точка $x = -2$. Подставим это значение в данную систему и получим: $\begin{cases} 2\cdot(-2)+4 \ge 0, \\ 15-3\cdot(-2) \le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \ge 0, \\ 21 \le 0. \end{cases}$ Так как второе неравенство системы неверно, то ответы 1 и 3 отпадают.

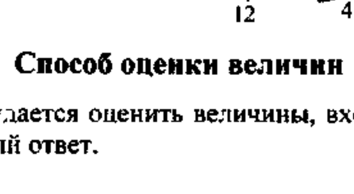
Проверим теперь ответы 2 и 4. Возьмем точку $x = -5$, входящую в ответ 4, и получим: $\begin{cases} 2\cdot(-5)+4 \ge 0, \\ 15-3\cdot(-5) \le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -6 \ge 0, \\ 30 \le 0. \end{cases}$ Оба неравенства неверны. Поэтому правильный ответ 2.

Пример 5

Решите неравенство $2x - 3(x + 4) \le x + 12$.

1) $x \ge -12$;
2) $x \ge 12$;
3) $x \le -12$;
4) $x \le 12$.

Проверим ответы. Для удобства изобразим ответы на координатных осях. Проверим сначала ответы 3 и 4. Возьмем точку $x = -14$, входящую только в эти ответы. Получим: $2 \cdot (-14) - 3 \cdot (-14 + 4) \le -14 + 12$ или $2 \le -2$. Так как неравенство неверное, то ответы 3 и 4 отпадают. Теперь разберемся с ответами 1 и 2. Возьмем точку $x = 0$, которая входит только в ответ 1. Получаем: $2 \cdot 0 - 3 \cdot (0 + 4) \le 0 + 2$ или $-12 \le 12$. Так как неравенство верное, то правильный ответ 1.



Способ оценки величин

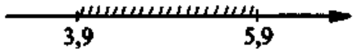
В ряде случаев удается оценить величины, входящие в задачу, и выбрать правильный ответ.

Пример 6

Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{15}$ и $\sqrt{35}$?

1) 16, 17, ..., 34;
2) 3, 4 и 5;
3) 4, 5 и 6;
4) 4 и 5.

Так как $15 \approx 16$, то $\sqrt{15}$ чуть меньше 4, для оценок будем считать $\approx 3{,}9$. Число $35 \approx 36$, и $\sqrt{35}$ чуть меньше 6, для оценок будем считать $\approx 5{,}9$. Отметим числа 3,9 и 5,9 на координатной оси. Видно, что в промежуток $3{,}9 \div 5{,}9$ попадают только два целых числа – 4 и 5. Поэтому правильный ответ 4.



Пример 7

Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{5}+1$ и $\sqrt{5}-1$.

1) 24;
2) 6;
3) 4;
4) $6-2\sqrt{5}$.

Очевидно, что $\sqrt{5}$ чуть больше 2 (для оценок $\sqrt{5} \approx 2{,}2$). Тогда стороны прямоугольника $\sqrt{5}+1 \approx 2{,}2+1 \approx 3{,}2$ и $\sqrt{5}-1 \approx 2{,}2-1 \approx 1{,}2$, и его площадь примерно равна $3{,}2 \cdot 1{,}2 \approx 3{,}8$. Учитывая, что в ответе 4 величина $6-2\sqrt{5} \approx 6-2\cdot 2{,}2 \approx 1{,}6$, видим, что наиболее подходящий ответ 3 (который действительно является правильным).

Пример 8

Укажите наименьшее из чисел $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{4}$; $0{,}67$; $0{,}7$.

1) $\frac{4}{5}$;
2) $\frac{5}{4}$;
3) 0,67;
4) 0,7.

Легко точно или приблизительно записать обыкновенные дроби в виде десятичных: $\frac{4}{5} = 0{,}8$ и $\frac{5}{4} = 1{,}25$. Теперь, сравнив числа 0,8; 1,25; 0,67 и 0,7, видим, что наименьшим является число 0,67. Правильный ответ 3.

Способ проверки размерности ответа

В задачах с текстовым содержанием и в задачах, связанных с физикой или геометрией, полезно проверить размерность ответа. Это позволяет сразу отбросить явно неправильные ответы.

Пример 9

Выразите из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ время t.

1) $t = \dfrac{v - v_0}{a}$;

2) $t = \dfrac{v_0 - v}{a}$;

3) $t = a(v - v_0)$;

4) $t = \dfrac{a}{v - v_0}$.

Вспомним размерности величин, входящих в данную формулу. Скорости v и v_0 измеряются в м/с, ускорение a – в м/с^2 и время t – в с. Проверим размерность правых частей приведенных ответов и получим:

1) $\frac{\text{м}}{\text{с}} : \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{с}$; 2) $\frac{\text{м}}{\text{с}} : \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{с}$; 3) $\frac{\text{м}}{\text{с}^2} : \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}^3}{\text{с}^3}$; 4) $\frac{\text{м}}{\text{с}^2} : \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{1}{\text{с}}$. Ответы 3 и 4 сразу отпадают. Варианты 1 и 2 имеют одинаковую размерность, и поэтому приходится использовать здравый смысл. При $a > 0$ тело ускоряется и $v > v_0$. Поэтому разность $v - v_0 > 0$. Тогда в случае 1 получаем: $t > 0$, в случае 2, наоборот, $t < 0$. Так как никто не знает, что такое отрицательное время, то правильный ответ 1.

Пример 10

От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до поселка?

Пусть x км – расстояние от города до поселка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 25$; 2) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 25$; 3) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x} = 25$; 4) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x} = 25$.

В правой части всех уравнений стоит величина увеличения скорости, и она измеряется в км/ч. В левой части числа 2 и 3 соответствуют времени движения автомобиля с увеличенной скоростью и реальной скоростью. Эти числа имеют размерность ч. Определим размерность левых частей приведенных уравнений: 1) км : ч = км/ч; 2) км : ч = км/ч; 3) ч : км = ч/км; 4) ч : км = ч/км. По несоответствию размерностей левой и правой частей уравнения ответы 3 и 4 отпадают. Разберемся с ответами 1 и 2. Так как x – положительная величина, то $\frac{x}{2} > \frac{x}{3}$. Потому выражение $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 0$, а выражение $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 0$. Так как в правой части уравнений стоит положительное число 25, то правильный ответ 1.

Способ проверки ответов по условию

Иногда, используя условие задачи, можно сразу проверить ответ.

Пример 11

Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$.

1) $x_1 = 2, x_2 = -2$;
2) $x = 2$;
3) $x_1 = 6, x_2 = -6$;
4) $x = 6$.

Так как в данном квадратном уравнении нет линейного члена, то его корни являются симметричными числами, т. е. если уравнение имеет корень x_0, то число $-x_0$ также корень этого уравнения. Поэтому ответы 2 и 4 (которые содержат только один корень) явно не подходят. Проверим ответ 1. Подставим в уравнение, например, значение $x = 2$ и получим: $\frac{1}{3} \cdot 2^2 - 12 = -10\frac{2}{3} \neq 0$. Поэтому ответ 1 также не подходит. Итак, правильный ответ 3.

Пример 12

Решите уравнение $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2$.

1) -23;
2) -20;
3) -6;
4) -9.

Проверим приведенные ответы, подставляя их в левую часть уравнения. Получим:

1) $\frac{-23+9}{3} - \frac{-23-1}{5} = -\frac{14}{3} + \frac{24}{5} \approx -5 + 5 \neq 2$;

2) $\frac{-20+9}{3} - \frac{-20-1}{5} = -\frac{11}{3} + \frac{21}{5} \approx -4 + 4 \neq 2$;

3) $\frac{-6+9}{3}-\frac{-6-1}{5}=1+\frac{7}{5}\approx 2\frac{2}{5}\neq 2;$

4) $\frac{-9+9}{3}-\frac{-9-1}{5}=0+2=2.$ Правильный ответ.

Способ обратной задачи

Достаточно часто в задачах, связанных с преобразованиями выражений, проще решить обратную задачу и тем самым проверить приведенные ответы.

Пример 13

Укажите выражение, тождественно равное многочлену $4x^2-6xy$.

1) $-2x(-3y-2x)$;

2) $-2x(3y-2x)$;

3) $-2x(3y+2x)$;

4) $-2x(2x-3y)$.

Ответы представляют собой разложение некоторого многочлена на множители. Если при раскрытии скобок получится данный многочлен, то разложение на множители сделано правильно. Так как в данном многочлене коэффициенты членов противоположны по знаку, то в ответах в скобках коэффициенты слагаемых также будут противоположны по знаку. Поэтому ответы 1 и 3 сразу можно отбросить. Раскроем скобки в ответах 2 и 4 и получим:

2) $-2x(3y-2x)=-6xy+4x^2$ (данный многочлен);

4) $-2x(2x-3y)=-4x^2+6xy$. Итак, правильный ответ 2.

Пример 14

Известно, что верно неравенство $x>y-z$. Какое из неравенств также является верным?

1) $x-y>z$;

2) $y>x+z$;

3) $z-x>y$;

4) $z>y-x$.

Запишем неравенства в ответах в виде, аналогичном виду данного неравенства: слева – переменная x, справа – переменные y и z. Получаем: 1) $x>y+z$; 2) $x<y-z$; 3) $x<z-y$; 4) $x>y-z$. Видно, что только в случае 4 неравенство в ответе и данное неравенство совпадают. Поэтому неравенство 4 является верным.

Другие способы

В простейших случаях можно использовать соображения, основанные на обычном здравом смысле и очень поверхностном знании математики.

Пример 15

Средний вес девочек того же возраста, что и Маша, равен 36 кг. Вес Маши составляет 110% среднего веса. Сколько весит Маша?

1) 32,4 кг;
2) 39,6 кг;
3) 36 кг;
4) 3,6 кг.

Так как вес Маши составляет 110% среднего веса (т. е. несколько больше среднего веса), то она весит больше 36 кг. Из приведенных ответов подходит только ответ 2.

Пример 16

Из полного бака, вместимость которого 100 л, через открытый кран вытекает вода со скоростью 5 л/мин. Количество воды y, остающейся в баке, является функцией времени x, в течение которого вытекает вода. Задайте эту функцию формулой.

1) $y = 100 - 5x$;
2) $y = 5x$;
3) $y = 5x - 100$;
4) $y = 100 - \frac{5}{x}$.

Из здравого смысла понятно, что с течением времени x в баке остается все меньше и меньше воды y. Поэтому $y(x)$ должна быть убывающей функцией. Из приведенных функций только функция 1 $y = 100 - 5x$ является убывающей. Если вам трудно установить монотонность функции, то достаточно сравнить значения приведенных функций, например, при $x = 1$ и $x = 20$.

Из приведенных примеров видно, что простые приемы позволяют найти правильные ответы многих заданий, фактически не решая их.

Уроки 103–104. Демонстрационный вариант ГИА (факультативное занятие)

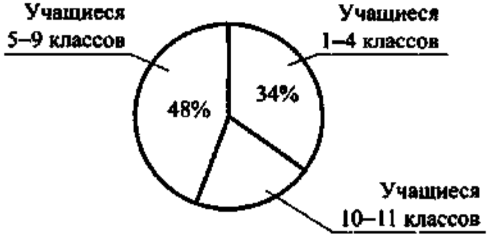
Цели: дать представление о структуре и сложности варианта; разобрать его; отметить его особенности.

Далее приведен вариант экзаменационной работы с решением, по которому можно судить об уровне сложности заданий и их распределении по темам. В части 2 после номера задания в скобках указано число баллов за это задание. Рекомендуем вам самостоятельно выполнить вариант. В случае затруднений можно обратиться к разбору варианта.

Вариант

Часть 1

1. Диаграмма иллюстрирует распределение учащихся школы между начальными, средними и старшими классами. Сколько процентов всех учащихся учится в 10–11 классах этой школы?



2. Найдите сумму, значение которой больше 1.

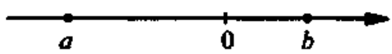
1) $0,45+\frac{1}{3}$;

2) $0,54+\frac{2}{3}$;

3) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

4) $0,27 + 0,28 + 0,29$.

3. На координатной прямой точками изображены числа a и b. Определите, какое из чисел является наибольшим: $2a$, $2b$ или $a + b$.



1) $a + b$;
2) $2a$;
3) $2b$;
4) Для ответа не хватает данных.

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{9}xy$ при $x=\sqrt{12}$, $y=\sqrt{3}$.

5. Принтер печатает одну страницу за 6 с. Сколько страниц можно распечатать на этом принтере за t мин?

1) $6t$ с.;

2) $10t$ с.;
3) $0{,}1t$ с.;
4) $\frac{t}{6}$ с.

6. Упростите выражение $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

7. Найдите значение выражения $(27\cdot 3^{-4})^2$.
1) $\frac{1}{9}$;
2) 3;
3) −9;
4) $-\frac{1}{9}$.

8. Упростите выражение $3\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{2}$.

9. Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$.
1) 1;
2) 1,4;
3) 5;
4) 5,4.

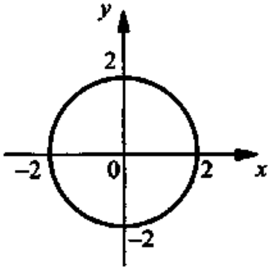
10. Какое из уравнений не имеет корней?
1) $2x^2-3x+1=0$;
2) $2x^2+4x-1=0$;
3) $3x^2+4x+1=0$;
4) $3x^2-2x+1=0$.

11. Для каждой системы уравнений укажите число ее решений. (Для ответа используйте графики; график уравнения $x^2+y^2=4$ изображен на рисунке.)

1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+3. \end{cases}$



а) нет решений;

б) одно решение;

в) два решения;

г) три решения.

12. Какое из следующих чисел не является решением неравенства $9x - 3 > 10x - 2$?

1) −4,9;
2) −1,7;
3) −1,1;
4) −0,7.

13. Сравните, если возможно, числа a и c при условии, что $a > b$ и $b \le c$.

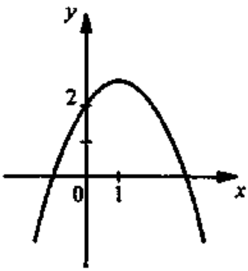
1) $a > c$;
2) $a < c$;
3) $a \le c$;
4) сравнить невозможно.

14. В зрительном зале 15 рядов. В первом ряду 10 мест, а в каждом следующем на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько мест в зрительном зале?

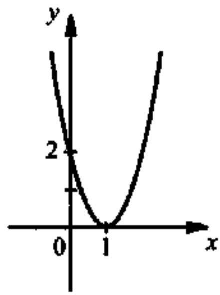
1) 255;
2) 165;
3) 120;
4) 75.

15. На каком рисунке изображен график функции $y = f(x)$, обладающей свойствами: $f(0) = 2$ – и функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$?

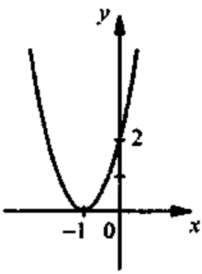
1)



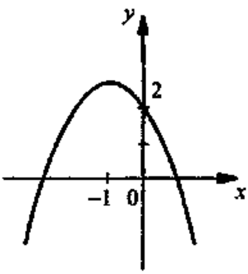
2)



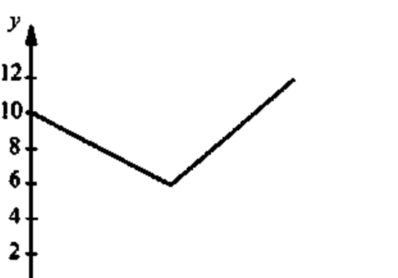
3)



4)



16. График показывает, как менялась цена бензина в течение месяца. Определите, на сколько процентов выросла его цена за месяц.



1) на 100%;
2) на 60%;
3) на 20%;
4) на 2%.

17. На 1000 электрических лампочек в среднем приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

18. Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Часть 2

19 (2). Сократите дробь $\dfrac{3a^2-4a+1}{1-3a+b-3ab}$.

20 (4). Постройте график функции $y=\begin{cases}x(x-2), & \text{если } x\ge 0,\\ x(2-x), & \text{если } x<0.\end{cases}$ При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

21 (4). На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине ее можно сделать на 15 мин быстрее, чем на второй?

22 (6). Найдите значение m, при котором точки $A(3;\ 15)$, $B(9;\ 5)$ и $C(24;\ m)$ лежат на одной прямой.

23 (6). При каких значениях k число 0 находится между корнями уравнения $x^2-4x+(2-k)(2+k)=0$?

Решения заданий работы

Часть 1

1. Число всех учащихся в школе примем за 100%, тогда число учащихся 10–11 классов в соответствии с диаграммой:

$100-48-34=18\%$.

Ответ: 18%.

2. Переведем обыкновенные дроби в десятичные и оценим приведенные суммы:

1) $0,45+\dfrac{1}{3}\approx 0,45+0,33<1$;

2) $0,54+\dfrac{2}{3}\approx 0,54+0,66>1$;

3) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\approx 0,22+0,33+0,17<1;$

4) $0,27 + 0,28 + 0,29 < 1.$

Видно, что только сумма 2) больше 1.

Ответ: 2.

3. Из приведенного рисунка видно, что $a < 0$ и $b > 0$. Поэтому легко оценить числа: $2a < a < 0$, $a < a + b < b$ и $2b > b > 0$. Итак, наибольшее число $2b$.

Ответ: 3.

4. Подставим в выражение $\frac{1}{9}xy$ величины $x=\sqrt{12}$ и $y=\sqrt{3}$ и получим: $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{36}}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$

Ответ: 2/3.

5. За 1 мин принтер распечатает $\frac{60}{6}=10$ страниц. Поэтому за t мин принтер распечатает $10t$ страниц.

Ответ: 2.

6. Разложим знаменатель второй дроби на множители, приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получим:

$$\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{(m-n)(m+n)}=\frac{(m-n)^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=$$

$$=\frac{m^2-2mn+n^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=-\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$

Ответ: $-\frac{2mn}{m^2-n^2}.$

7. Используя свойства действий со степенями, найдем значение выражения: $(27\cdot 3^{-4})^2=(3^3\cdot 3^{-4})^2=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$

Ответ: 1.

8. Во втором выражении вынесем множитель из-под корня и упростим выражение: $3\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{2}=3\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{2}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}=$
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

Ответ: $\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

9. Все члены уравнения $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$ умножим на 6 и получим $2x+3(x-1)=24 \Rightarrow 2x+3x-3=24 \Rightarrow 5x=27$, откуда $x=5{,}4$.

Ответ: 4.

10. Для приведенных квадратных уравнений найдем дискриминанты и получим:

1) $2x^2-3x+1=0$, $D=9-4\cdot2\cdot1=1>0$ (имеет 2 корня);
2) $2x^2+4x-1=0$, $D=16-4\cdot2\cdot(-1)=24>0$ (имеет 2 корня);
3) $3x^2+4x+1=0$, $D=16-4\cdot3\cdot1=4>0$ (имеет 2 корня);
4) $3x^2-2x+1=0$, $D=4-4\cdot3\cdot1=-8<0$ (не имеет корней).

Видно, что только уравнение 4 не имеет корней.

Ответ: 4.

11. Учтем, что второе уравнение системы задает параболу, направленную ветвями вверх. Рассмотрим три приведенные системы и получим:

1) парабола $y=x^2$ выходит из начала координат и пересекает окружность $x^2+y^2=4$ в двух точках. Поэтому такая система уравнений имеет два решения, т. е. 1 → в;
2) парабола $y=x^2+2$ выходит из точки (0; 2) и имеет с окружностью $x^2+y^2=4$ только эту одну общую точку. Поэтому такая система уравнений имеет одно решение, т. е. 2 → б;
3) парабола $y=x^2+3$ выходит из точки (0; 3) и располагается выше окружности $x^2+y^2=4$, т. е. не имеет с ней общих точек. Поэтому такая система уравнений не имеет решений, т. е. 3 → а.

Ответ: 1 → в; 2 → б; 3 → а.

12. Решим приведенное линейное неравенство $9x-3>10x-2$ и получим: $-3+2>10x-9x$ или $-1>x$, т. е. $x<-1$. Видно, что число 4) $-0{,}7$ не входит в этот промежуток.

Ответ: 4.

13. Так как $a>b$ и $b\le c$, то сравнить числа a и c невозможно. Например, на верхней шкале $a>c$, а на нижней, наоборот, $a<c$.

Ответ: 4.

14. Посчитаем число мест в рядах: 10, 11, 12, … . Видно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 10$ и разностью $d = 1$. Найдем сумму $n = 15$ первых членов прогрессии. Получаем: $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ или $S_{15} = \frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot (15-1)}{2} \cdot 15 = 17 \cdot 15 = 255$ (мест).

Ответ: 1.

15. Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, то она имеет наибольшее значение при $x = 1$. При этом значении функции при $x = 0$: $f(0) = 2$. Этим условиям удовлетворяет только функция, график которой изображен на рис. 1.

Ответ: 1.

16. Из графика видно, что в начале месяца бензин стоил 10 руб., в конце месяца – 12 руб. Поэтому цена бензина увеличилась на $12 - 10 = 2$ руб., что составляет $\frac{2}{10} \cdot 100 = 20\ \%$ от первоначальной цены.

Ответ: 2.

17. Так как из 1000 электрических лампочек 5 бракованных, то исправных лампочек $1000 - 5 = 995$ штук. Поэтому вероятность купить исправную лампочку $\frac{995}{1000} = 0{,}995$.

Ответ: 0,995.

18. Запишем варианты измерения в порядке возрастания и получим сгруппированный ряд данных: 130, 132, 134, 158, 166. Среднюю варианту в этом ряду называют медианой (т. е. медиана равна 134). Найдем также среднее арифметическое этого набора чисел: $\frac{130+132+134+158+166}{5} = \frac{720}{5} = 144$. Тогда среднее арифметическое набора чисел отличается от его медианы на $144 - 134 = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

Часть 2

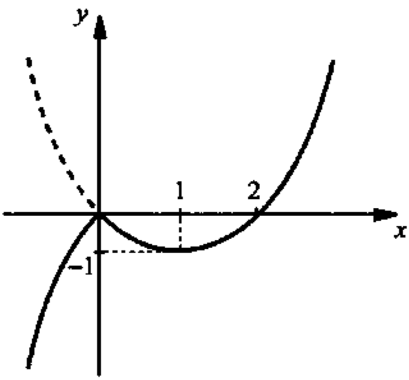
19 (2). Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. В числителе найдем корни квадратного трехчлена, в знаменателе используем группировку членов и вынесение общего

множителя за скобки. Получаем: $\frac{3a^2-4a+1}{1-3a+b-3ab}=\frac{3\left(a-\frac{1}{3}\right)(a-1)}{(1-3a)+b(1-3a)}=$

$=\frac{(3a-1)(a-1)}{(1-3a)(1+b)}=\frac{1-a}{1+b}.$

Ответ: $\frac{1-a}{1+b}$.

20 (4). Построим сначала график функции $y = x(x - 2)$ – пунктирная парабола. Оставим тот участок кривой, для которого $x \geq 0$. Теперь построим график функции $y = x(2 - x)$. Так как $x(2 - x) = -x(x - 2)$, то при $x < 0$ надо отразить пунктирную часть параболы вниз. Поэтому графиком данной функции является сплошная кривая. Видно, что значения функции $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x < 2$.



Ответ: $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x < 2$.

21 (4). Пусть на первой машине можно сделать копию пакета документов за t мин, тогда на второй – за $t + 15$ мин. Производительность машин $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{t+15}$ соответственно (при этом весь объем работы принят за единицу). Так как при одновременной работе двух машин копию можно сделать за 10 мин, то получаем уравнение: $10\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+15}\right)=1 \Rightarrow 20t+150=t^2+15t \Rightarrow 0=t^2-5t-150.$ Корни этого уравнения $t = 15$ и $t = -10$ (не подходит). Итак, работа будет сделана на первой машине за 15 мин, на второй – за 30 мин.

Ответ: на первой машине за 15 мин, на второй – за 30 мин.

22 (6). Пусть уравнение прямой $y = kx + b$. Так как ее график проходит через точки $A(3; 15)$ и $B(9; 5)$, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой. Получаем систему линейных уравнений: $\begin{cases} 15 = 3k + b, \\ 5 = 9k + b. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе: $10 = -6k$, откуда $k = -\frac{5}{3}$. Подставим это значение в первое уравнение: $15 = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + b$, откуда $b = 20$. Итак, уравнение прямой $y = -\frac{5}{3}x + 20$. Эта прямая также проходит через точку $C(24; m)$. Получаем: $m = -\frac{5}{3} \cdot 24 + 20 = -20$.

Ответ: $m = -20$.

23 (6). Так как число 0 находится между корнями уравнения $x^2 - 4x + (2 - k)(2 + k) = 0$, то произведение корней уравнения (по формуле Виета) $(2 - k)(2 + k) < 0$. Решение этого неравенства $k < -2$ и $k > 2$. Проверим, что уравнение имеет корни. Найдем: $D/4 = 4 - (2 - k)(2 + k) = 4 + (k - 2)(k + 2) = 4 + k^2 - 4 = k^2 \geq 0$, т. е. при всех значениях k данное уравнение имеет решения.

Ответ: при $k < -2$ и $k > 2$.

Литература

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра: Учебник для 9 класса. – М.: Просвещение, 2004.

2. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность. 5–9 классы. – М.: Дрофа, 2004.

3. Бурмистрова Т.А. Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2009.

4. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н. и др. Задачи по математике. Алгебра. – М.: Наука, 1987.

5. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов. – М.: Просвещение, 1998.

6. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1988.

7. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов. – М.: Просвещение, 1991.

8. Кочагина М.Н., Кочагин В.В. Малое ЕГЭ по математике. 9 класс. – М.: Эксмо, 2007.

9. Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2006.

10. Лютикас В.С. Теория вероятностей. 9–11 классы. – М.: Просвещение, 1990.

11. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра: Учебник для 9 класса. – М.: Мнемозина, 2009.

12. Мордкович А.Г., Александрова Л.А., Мишустина Т.Н. и др. Алгебра: Задачник для 9 класса. – М.: Мнемозина, 2009.

13. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2000.

14. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра. 9 класс. – М.: Просвещение, 2008.

15. Рурукин А.Н. Решение задач по алгебре и геометрии. 9 класс. – М.: МИФИ, 2003.

16. Рурукин А.Н. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительные, ЕГЭ на 5+. – М.: ВАКО, 2006.

17. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами. – М.: Илекса, 2007.

18. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1988.

19. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.

20. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс. – М.: Астрель, 2006.

Оглавление

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич
Масленникова Ирина Александровна
Мишина Татьяна Георгиевна

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к УМК А.Г. Мордковича и др. (*М.: Мнемозина*)

9 класс

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки *Анны Новиковой*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 18.01.2011.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 15,12. Тираж 10 000 экз. Заказ № 227.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати – ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru